

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA

**IMPOSICIÓN DE RESTRICCIONES DE CAUSALIDAD Y
PASIVIDAD EN ANÁLISIS ESPECTRAL**

Tesis de Grado presentada por

Rodrigo Alejandro González Vidal

como requisito parcial para optar al título de

Ingeniero Civil Electrónico

y al grado de

Magíster en Ciencias de la Ingeniería Electrónica

Profesor Guía

Dr. Ricardo Rojas Reischel

Investigadores Correferentes

Dr. Cristian Rojas Enos - Mg. Patricio Valenzuela Pacheco

Valparaíso, 2016.

TÍTULO DE LA TESIS:

IMPOSICIÓN DE RESTRICCIONES DE CAUSALIDAD Y PASIVIDAD EN ANÁLISIS ESPECTRAL

AUTOR:

Rodrigo Alejandro González Vidal

TRABAJO DE TESIS, presentado en cumplimiento parcial de los requisitos para el título de Ingeniero Civil Electrónico y el grado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería Electrónica de la Universidad Técnica Federico Santa María.

Dr. Ricardo Rojas R.

Dr. Cristian Rojas E.

Mg. Patricio Valenzuela P.

Dr. Daniel Sbárbaro H.

Valparaíso, Noviembre de 2016.

*Dedicado a mi familia,
por acompañarme y enseñarme
desde siempre.*

*También a mis amigos, que sin ellos
esto no hubiera sido posible.*

AGRADECIMIENTOS

En pocas palabras quisiera agradecer a todos los que directa o indirectamente me han ayudado durante los últimos 6 años en este largo trayecto que concluye con esta tesis.

En primer lugar quisiera hacer mención a mi familia, mis padres Agustín y Cecilia y mis hermanos Eduardo y Paula, con los cuales he compartido toda mi vida. Está demás decir que son un pilar fundamental para mí. Mucho de lo que he aprendido en el plano emocional e intelectual ha sido gracias a ellos, y no puedo sino estar muy feliz por su presencia en cada momento.

En segundo lugar quiero agradecer a Antonia, *Anton*, quien ha sido una compañera genial. Agradezco demasiado las hermosas experiencias que hemos vivido juntos, los té y cafés, helados y almuerzos, trotes y salidas, como también los momentos de estudio, memoria y concentración. Le doy las gracias por apoyarme siempre y darme tantas alegrías.

También quisiera expresar mi gratitud a mis profesores, en particular hacia el profesor Ricardo Rojas, quien me ha orientado hacia el cumplimiento de mis metas, y me ha instruido en apreciar aún más la belleza del conocimiento. Agradezco las conversaciones sobre matemática, análisis de sistemas lineales, control e identificación, las cuales me han ayudado mucho para ampliar mi visión con respecto a estas materias. También agradezco las enseñanzas de los profesores Juan Yuz, Francisco Vargas y Juan Carlos Agüero.

Me gustaría además, aprovechar de agradecer a Cristian Rojas y Patricio Valenzuela, quienes han sido de mucha ayuda para el desarrollo de esta tesis. Les doy las gracias por su apoyo, y por su gran hospitalidad al recibirme durante 2 semanas en Estocolmo, Suecia. No olvidaré esa magnífica experiencia.

Finalmente, sin que signifique desmerecer el aprecio que siento por ellos, quisiera reconocer la importancia de mis amigos, todos importantísimos para mí. Sin un orden específico, quisiera mencionar a algunos que he conocido y han marcado mi vida durante estos últimos años: Felipe y Danilo Ávila, Julian Rojas, René Fredes, Mario López, Javier Romero, José Rojas, Guillermo Becerra, Guillermo Castro y José Allende. También debo mencionar con gran cariño a mis viejos amigos Ives e Ignacio Ibacache, Gonzalo Farías, José Ignacio Freire, Felipe Barrera, Camilo Silva, Marko Gasic, Pablo Salgado y Marcelo Rivera. Sin todos ellos, mi vida sería distinta. Les debo mucho.

RESUMEN

El estudio de métodos de estimación no paramétricos para identificación de sistemas tiene una larga historia. Su importancia radica en que a partir de éstos se puede verificar la calidad del experimento de identificación, obtener una visión general sobre las dinámicas del sistema para proponer una estructura de modelos acorde y validar el modelo obtenido con técnicas de estimación paramétrica. Entre las técnicas ocupadas frecuentemente en la práctica, una de las más populares es análisis espectral [1, 2].

El método de análisis espectral permite obtener estimaciones de la respuesta en frecuencia y por ende de la respuesta a impulso de un sistema, a partir del cociente de densidades espectrales de potencia (PSD), [3]. Un estimador básico derivado de este análisis, es la estimación de la función de transferencia empírica (ETFE) [4], la cual se define como el cociente entre la transformada de Fourier de la secuencia de salida y la transformada de Fourier de la secuencia de entrada. El estimador ETFE no es consistente, por ende es usualmente modificado por la inclusión de ventanas no rectangulares como herramienta para estimar las densidades espectrales de potencia con mayor precisión.

Los sistemas por estimar comúnmente tienen propiedades que se saben de antemano. Causalidad es una propiedad de todo sistema real, en cuanto a que los efectos no pueden preceder las causas. Por otra parte, el concepto de pasividad caracteriza las redes eléctricas pasivas, y en general todo sistema físico que no sea capaz de generar energía. A conocimiento del autor, los estimadores no paramétricos por análisis espectral no incluyen esta información para mejorar su desempeño como estimadores.

En esta tesis, se estudia cómo imponer las condiciones de causalidad y pasividad en la estimación no paramétrica por análisis espectral. Se plantea que, si se logra incorporar esta información en la estimación de sistemas causales o pasivos, es posible lograr mejores resultados en la práctica, en cuanto a que la estimación será más precisa que con los métodos tradicionales de análisis espectral.

Para el problema de imposición de causalidad, se determinan explícitamente las respuestas a impulso estimadas por ETFE tradicional e incluyendo ventanas no rectangulares, incluyendo condiciones iniciales, y además suponiendo estructuras generales de modelos. Se muestra que el estimador ETFE generalmente conduce a estimaciones no causales, y que esta propiedad depende de la secuencia de entrada. Para los casos mencionados, se ha obtenido una expresión cerrada de un estimador que fuerza estimaciones causales y de menor matriz de covarianza dentro de un amplio conjunto de estimadores lineales, gracias a una estrategia llamada blanqueado de Cholesky [5, 6].

En cuanto a la imposición de pasividad, se estudian las restricciones que deben tener los sistemas

lineales pasivos, y se caracterizan éstos en cuanto a la preservación de su pasividad a través de diferentes métodos de discretización. Obtenidos los alcances donde esta teoría tiene cabida, se analizan las propiedades estocásticas de la parte real de la respuesta en frecuencia estimada por ETFE, con el objetivo de imponer pasividad a través de esta componente de la estimación. Luego, se formula un estimador que impone pasividad, y se describen técnicas alternativas para satisfacer la restricción a través de la teoría de outliers.

A lo largo de esta tesis se presentan diversos ejemplos que permiten ilustrar los desarrollos realizados y apreciar la importancia del aporte hecho al área de estimación no paramétrica.

Palabras claves

Identificación de sistemas, estimación no paramétrica, análisis espectral, ETFE, causalidad, pasividad.

ABSTRACT

The study of non-parametric estimation methods for system identification has a long history. Its importance lies in that they can be used to verify the quality of an identification experiment, get some insight into the dynamics of the system to propose a suitable model structure, and validate an estimated parametric model. Among the techniques commonly employed in practical applications, one of the most popular is the spectral analysis method [1, 2].

The spectral analysis method provides frequency and impulse response estimates of a system from the ratio of power spectral densities (PSD) of its input and output [3]. A basic estimator derived from this analysis is the empirical transfer function estimate (ETF) [4], which is defined as the ratio between the Fourier transform of the output sequence and the Fourier transform of the input sequence. The ETF is not consistent in general, and therefore it is usually modified by the inclusion of non-rectangular windows to obtain better PSD estimates.

When estimating systems, it is common to know in advance some basic properties of them. Causality is a property of any real system, which consists in that effects can not precede causes. In addition, the concept of passivity characterizes passive electrical networks (formed by resistors, inductors and capacitors). And in general, passivity relates to any physical system that is not capable of generating energy. However, to the knowledge of the author, non-parametric estimators by spectral analysis do not include this information to improve their performance.

In this thesis, impositions of the conditions of causality and passivity in non-parametric estimation by spectral analysis are studied. Incorporating this information in the derivation of the estimator can contribute to achieve better results in practice, in that the estimate will be more accurate than traditional methods of spectral analysis.

For imposing causality, several aspects are studied, including the estimated impulse response obtained from ETF for different model structures, and the effect of initial conditions in the estimation. It is shown that the ETF usually leads to noncausal estimates, and this property depends on the input sequence. For the cases described above, an estimator which forces causality is obtained, and it is proven that it minimizes the covariance matrix of the causal elements in a broad class of linear and causal estimators, thanks to a strategy called Cholesky whitening [5, 6].

As for the imposition of passivity, the restrictions that passivity imposes on linear systems are studied. Passive systems are characterized in terms of preserving its passivity through different methods of discretization. Once the scope where this theory is valid is determined, the stochastic properties of the real part of the frequency response estimated by ETF are analyzed, with the aim of imposing passivity through this component of the estimation. Then, an estimator that imposes passi-

vity is formulated, and alternative techniques are described to satisfy the passivity constraint by the theory of outliers.

There are several examples throughout this thesis which illustrate the developments made, and allow to appreciate the importance of the contribution made in the field of non-parametric estimation and in particular, to spectral analysis methods.

Keywords

System identification, non-parametric estimation, spectral analysis, ETFE, causality, passivity.

CONTENIDO

AGRADECIMIENTOS	I
RESUMEN	III
ABSTRACT	V
ÍNDICE DE FIGURAS	XI
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Estado del arte	2
1.2. Identificación de problemas	4
1.3. Principales contribuciones	5
1.4. Organización del documento	5
2. MARCO TEÓRICO	7
2.1. Introducción	7
2.2. Identificación de sistemas	7
2.2.1. Objetivos y problemas en identificación	8
2.2.2. Estimación no paramétrica y ETFE	9
2.3. El problema de causalidad y pasividad	12
2.3.1. Causalidad	13
2.3.2. Pasividad	13
2.4. Resumen	14
3. CAUSALIDAD: ANÁLISIS TEÓRICO DEL ESTIMADOR DE LA RESPUESTA A IMPULSO POR ETFE, MODELO OE	15
3.1. Introducción	15
3.2. Deducción del estimador de la respuesta a impulso	15
3.3. Análisis de media y covarianza	22
3.3.1. Esperanza	22
3.3.2. Covarianza	23
3.3.3. Matriz de covarianza	23
3.4. Conclusiones	24
	VII

4. ANÁLISIS DE CASOS Y EL PROBLEMA DE CAUSALIDAD DEL ESTIMADOR ETFE	25
4.1. Introducción	25
4.2. Consideraciones sobre implementación y simulación	25
4.3. Causalidad dependiente de la entrada	26
4.3.1. Primeras estimaciones causales y no causales	26
4.3.2. Estimaciones causales usando otra señal de entrada	29
4.4. Variación de parámetros de simulación e interpretaciones	31
4.5. Conclusiones	40
5. ETFE CAUSAL, MODELO OE	43
5.1. Introducción	43
5.2. En busca de un mejor estimador	43
5.3. Formulación de ETFE causal	45
5.4. Implementación y simulaciones	52
5.4.1. Consideraciones previas	53
5.4.2. Modelo FIR	53
5.4.3. Sistema de segundo orden	55
5.4.4. Sistema de tercer orden	57
5.4.5. Sobre la elección de M	58
5.5. Conclusiones	60
6. EXTENSIONES AL PROBLEMA DE CAUSALIDAD	61
6.1. Introducción	61
6.2. ETFE considerando condiciones iniciales	61
6.3. ETFE considerando una estructura general de modelos	63
6.3.1. Deducción de la respuesta a impulso y análisis de media y covarianza	64
6.3.2. Implementación y simulación	66
6.4. Incorporación de ventanas en el estimador ETFE	68
6.4.1. Deducción del estimador suavizado de la respuesta a impulso	69
6.4.2. Análisis de media y covarianza del estimador ETFE suavizado	72
6.5. ETFE Suavizado Causal	73
6.5.1. Formulación del método	73
6.5.2. Implementación y Simulaciones	74
6.6. Conclusiones	83
7. IMPOSICIÓN DE PASIVIDAD EN ETFE	85
7.1. Introducción	85
7.2. Definiciones y conceptos preliminares	85
7.3. Caracterización de sistemas lineales pasivos	87
7.4. Pasividad por discretización	91
7.4.1. Preservación de pasividad	91
7.5. Ejemplos de sistemas pasivos simples	96
7.6. Pasividad: análisis del estimador ETFE	98

7.6.1. Primer análisis de $\text{Re}\{\hat{G}(e^{j\omega})\}$	99
7.6.2. Segundo análisis de $\text{Re}\{\hat{G}(e^{j\omega})\}$	100
7.7. ETFE Pasivo	104
7.7.1. Pasividad por truncamiento y blanqueo	104
7.7.2. Tratamiento con teoría de outliers	107
7.8. Conclusiones	108
8. CONCLUSIONES	109
8.1. Discusión general de los resultados	109
8.2. Contribuciones principales por capítulo	110
8.3. Trabajo futuro	111
A. NOTACIÓN Y CONCEPTOS MATEMÁTICOS DE UTILIDAD	113
A.1. Notación y elementos básicos	113
A.2. Transformada de Fourier en tiempo discreto y transformada de Fourier discreta	114
A.2.1. Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT)	114
A.2.2. Transformada de Fourier discreta (DFT)	116
A.3. Serie de Laurent y DTFT	118
A.4. Matrices definidas positivas y factorización de Cholesky	119
A.4.1. Matrices particionadas por bloques	119
A.4.2. Matrices definidas positivas	120
A.4.3. Factorización de Cholesky	121
REFERENCIAS	123

ÍNDICE DE FIGURAS

3.1. Diagrama de bloques de estructura <i>output error</i> .	16
4.1. Izquierda: respuesta a impulso verdadera (azul), y la estimada por ETFE (rojo). Derecha: magnitud de la respuesta en frecuencia verdadera (azul), y la estimada por ETFE (rojo). Gráficos para señal de entrada ruido blanco y varianza de ruido $\sigma^2 = 0.05$.	27
4.2. Entrada u_t rampa decreciente pseudoaleatoria, con $\sigma_e^2 = 10^{-5}$.	28
4.3. Izquierda: Respuesta a impulso verdadera (azul), y la estimada por ETFE (rojo). Derecha: Magnitud de la respuesta en frecuencia verdadera (azul), y la estimada por ETFE (rojo). Gráficos para señal de entrada rampa decreciente pseudoaleatoria y varianza de ruido $\sigma^2 = 0.15$.	28
4.4. Respuesta a impulso verdadera (azul), la estimada por ETFE usando u_t (rojo, denotada por \hat{g}_t^1), y usando \tilde{u}_t (verde, denotada por \hat{g}_t^2), otra señal que también provoca estimaciones causales.	30
4.5. Magnitud de la transformada de Fourier de la rampa decreciente $ U_1(e^{j\omega}) $ (rojo), y de la señal rampa alternada $ U_2(e^{j\omega}) $ (verde).	30
4.6. Respuesta en frecuencia verdadera (azul), la estimada por ETFE usando u_t (rojo, denotada por \hat{G}_1), y usando \tilde{u}_t (verde, denotada por \hat{G}_2).	31
4.7. Respuestas a impulso estimadas para $\Delta_\omega = \frac{2\pi}{N}$ (rojo), $\Delta_\omega = \frac{2\pi}{2N}$ (azul) y $\Delta_\omega = \frac{2\pi}{4N}$ (verde).	32
4.8. Respuesta a impulso verdadera (azul), y la estimada por ETFE (rojo) para entrada escalón unitario.	33
4.9. Respuesta a impulso verdadera (azul), y la estimada por ETFE (rojo) para entrada diente de sierra de 4 períodos.	34
4.10. Magnitud del espectro de la señal de entrada para un período (azul), y para la secuencia entera (rojo).	35
4.11. Magnitud de la respuesta en frecuencia $\hat{G}(e^{j\omega})$ estimada por ETFE con entrada periódica.	36
4.12. Magnitud de $G(e^{j\omega})$ (azul) y la magnitud estimada por ETFE modificado (rojo), con entrada periódica.	36
4.13. Respuesta a impulso verdadera (azul), y la estimada por ETFE modificada (rojo).	37

4.14. Respuesta a impulso verdadera (azul), y la estimada por ETFE promediada con cuatro partes, con señal de entrada diente de sierra decreciente (rojo).	38
4.15. Coeficientes $\{\alpha_k\}$ de la serie de Laurent de $z^R(U_R(z))^{-1}$.	39
4.16. Respuesta a impulso verdadera (azul), y la estimada por ETFE promediada con $R = 200$ (rojo).	40
4.17. Respuesta a impulso verdadera (azul), y la estimada por ETFE promediada con entrada ruido blanco y $R = 250$ (rojo).	41
5.1. Respuesta a impulso verdadera (verde), estimada por ETFE tradicional (azul), y la estimada por ETFE causal (rojo), para sistema FIR con $N = 1000$.	54
5.2. Izquierda: respuesta a impulso verdadera (verde), estimada con ETFE tradicional (azul) y ETFE causal (rojo) para sistema segundo orden con $\sigma^2 = 0.05$. Derecha: respuesta en frecuencia verdadera (verde), estimada con ETFE tradicional (azul) y ETFE causal(rojo).	55
5.3. Varianzas empíricas de $\hat{g}(t)$ (azul), y el estimador causal $\tilde{g}_c(t)$ (rojo) para sistema de segundo orden, $\sigma^2 = 0.05$.	56
5.4. Varianzas empíricas de $\hat{g}(t)$ (azul), y el estimador causal $\tilde{g}_c(t)$ (rojo) para sistema de segundo orden, $\sigma^2 = 0.1$.	57
5.5. Varianzas empíricas de $\hat{g}(t)$ (azul), y el estimador causal $\tilde{g}_c(t)$ (rojo) para sistema de tercer orden, $\sigma^2 = 0.05$.	58
5.6. Varianzas empíricas de $\hat{g}(t)$ (azul), y el estimador causal $\tilde{g}_c(t)$ (rojo) para sistema de tercer orden, $\sigma^2 = 0.1$.	58
5.7. Varianzas empíricas de $\hat{g}(t)$ (azul), y el estimador causal $\tilde{g}_c(t)$ con $M = 100$ (rojo) y $M = 400$ (verde).	59
6.1. Diagrama de bloques de estructura general.	64
6.2. Varianzas empíricas de \hat{g}_t (azul), del estimador causal suponiendo ruido blanco \tilde{g}_t^c (rojo), y del estimador causal con ruido modelado $\tilde{\tilde{g}}_t^c$ (verde) para una estructura ARX.	67
6.3. Varianzas empíricas de \hat{g}_t (azul), del estimador causal suponiendo ruido blanco \tilde{g}_t^c (rojo), y del estimador causal considerando modelo verdadero del ruido $\tilde{\tilde{g}}_t^c$ (verde) para una estructura ARX.	68
6.4. Coeficientes β_k de la serie de Laurent de $z^{\delta_\gamma}(N_{\tilde{U}}(z))^{-1}$ para $\delta_\gamma = 30$.	76
6.5. Respuesta en frecuencia real (verde), estimada con ETFE suavizado tradicional (azul), y con ETFE suavizado causal (rojo), de un sistema FIR con $\delta_\gamma = 100$.	77
6.6. Varianzas empíricas de $\hat{g}(t)$ (azul), y el estimador suavizado causal $\tilde{g}_c(t)$ (rojo), para sistema de segundo orden con varianza de ruido $\sigma^2 = 0.25$ y $\delta_\gamma = 180$.	78
6.7. Respuesta a impulso verdadera (verde), y respuesta a impulso estimada con ETFE suavizada (azul) y ETFE suavizada causal (rojo) para $\delta_\gamma = 180$.	78
6.8. Varianzas empíricas de $\hat{g}(t)$ (azul), y el estimador suavizado causal $\tilde{g}_c(t)$ (rojo), para sistema de segundo orden con varianza de ruido $\sigma^2 = 0.25$ y $\delta_\gamma = 250$.	79
6.9. Estimaciones de un sistema segundo orden con $\delta_\gamma = 250$. Izquierda: respuesta a impulso verdadera (verde), y respuesta a impulso estimada con ETFE suavizada (azul) y ETFE suavizada causal (rojo). Derecha: respuesta en frecuencia real (verde), estimada con ETFE suavizado tradicional (azul), y con ETFE suavizado causal (rojo).	79

6.10. Varianzas empíricas de $\hat{g}(t)$ (azul), y el estimador suavizado causal $\tilde{g}_c(t)$ (rojo), para sistema de tercer orden con varianza de ruido $\sigma^2 = 0.15$ y $\delta_y = 200$.	80
6.11. Estimaciones de un sistema tercer orden con $\delta_y = 200$. Izquierda: Respuesta a impulso verdadera (verde), y respuesta a impulso estimada con ETFE suavizada (azul) y ETFE suavizada causal (rojo). Derecha: Respuesta en frecuencia real (verde), estimada con ETFE suavizado tradicional (azul), y con ETFE suavizado causal (rojo), todas en escala logarítmica.	81
6.12. Varianza coeficiente por coeficiente de $\hat{\mathbf{g}}$ (verde), $\tilde{\mathbf{g}}^c$ (negro), $\hat{\mathbf{g}}^s$ (azul), and $\tilde{\mathbf{g}}^{cs}$ (rojo).	82
7.1. Diagrama de Bode de un sistema de segundo orden en tiempo continuo (azul), y su discretización por retenedor de orden cero (rojo).	92
7.2. Diagramas de Nyquist para las funciones de transferencia continuas y obtenidas por discretización con retentor de orden cero. (i) usando $T_s = 0.07$. (ii) usando $T_s = 0.02$.	93
7.3. Diagrama de Nyquist del sistema pasivo $G(s)$ en Ecuación (7.4.6) con $a = 0.7$.	95
7.4. Diagramas de Nyquist para las funciones de transferencia obtenidas por discretización. (i) Discretización usando retenedor de orden cero. (ii) Discretización por Tustin.	95
7.5. Diagrama de Nyquist del sistema pasivo $H_1(z)$ dado por (7.5.1), con $a = 0.5$.	97
7.6. Diagrama de Nyquist del sistema pasivo $H_2(z)$ en la Ecuación (7.5.8).	98
7.7. Izquierda: respuesta a impulso verdadera (verde), estimada por ETFE tradicional (azul), y estimada por ETFE pasivo (rojo). Derecha: respuesta en frecuencia verdadera (verde), estimada por ETFE tradicional (azul), y estimada por ETFE pasivo (rojo).	105
7.8. Respuestas en frecuencia verdadera (verde), promedio de las estimaciones por ETFE tradicional (azul), y promedio por ETFE pasivo (rojo).	106
7.9. Promedio de las estimaciones de la parte real de la respuesta en frecuencia por ETFE tradicional (azul), y por ETFE pasivo (rojo).	106

INTRODUCCIÓN

Existen muchos procesos industriales, por ejemplo en la producción de papel, hierro, vidrio o compuestos químicos, que necesitan control automático para que funcionen eficientemente y con seguridad. Para tal efecto, el ajuste del controlador requiere usualmente algún tipo de modelo del proceso. El área de estudio que se dedica a obtener modelos para el control, basado en datos recolectados experimentalmente del proceso en cuestión, se denomina Identificación de Sistemas. El procedimiento habitual para estimar un modelo consiste en someter al sistema a experimentos capaces de generar datos, los cuales se procesan convenientemente para finalmente ajustar un modelo con parámetros apropiados a la situación. Éstos tienen validez limitada, en cuanto a que son razonables para un cierto punto de operación y además poseen poco significado físico, pero son relativamente fáciles de construir, simular y usar exitosamente para el control en operación real.

En identificación, se ha distinguido históricamente dos grandes líneas de investigación: aquella en la cual se estima parámetros de una estructura específica de modelo (modelado paramétrico), y aquella en que se pretende estimar puntos en un modelo no parametrizado, o con infinitos parámetros (modelado no paramétrico). Dentro de esta última área, diversos métodos se han desarrollado en pos de tener información útil del sistema, en el dominio del tiempo y frecuencia [2, 7].

Uno de los métodos no paramétricos más comunes se denomina análisis espectral. En este método, se busca obtener una estimación de la función de transferencia a partir de cocientes de densidades espectrales de potencia. Una variante simple a esta estimación es considerar la división entre las transformadas de Fourier discreta de la salida y entrada, conocida en la literatura como “empirical transfer function estimate”(ETFE) [4].

La estimación de la función de transferencia con ETFE da resultados pobres en general. Para mejorar la estimación resultante, diversas variantes se han probado con efectividad [4, 8, 9]. Una de éstas es la incorporación de ventanas de ponderación en el cálculo de las densidades espectrales de potencia. Sin embargo, las técnicas ocupadas guardan relación únicamente con los datos de entrada y salida obtenidos experimentalmente, y no aprovechan la naturaleza física del sistema por identificar. En este trabajo, las propiedades de sistemas que se pretenden aprovechar para identificación son la causalidad y la pasividad.

Causalidad en un sistema es esencial para extraer modelos confiables. En el dominio del tiempo, un sistema con respuesta a impulso h_t es causal si $h_t = 0$ cuando $t < 0$, es decir, el efecto (salida) jamás precede a la causa (entrada). Esta condición también puede ser definida en el dominio de la frecuencia, a través de las relaciones de Kramers-Kronig [10], en las cuales se obtienen expresiones que relacionan las partes reales e imaginarias de $H(j\omega)$, la transformada de Fourier de h_t .

Por otra parte, el concepto de pasividad se remonta a los circuitos eléctricos, y guarda relación con la capacidad de disipar/entregar energía en una red. Un sistema es pasivo si la energía máxima extraíble del sistema, definida como la integral del producto interno entre la salida y la entrada, está acotada superiormente [11]. Para sistemas lineales estables en tiempo continuo o discreto, esto se traduce en que el diagrama de Nyquist de la función de transferencia se encuentre enteramente en el semiplano derecho cerrado.

La condición de causalidad es necesaria para todos los sistemas que necesitan ser identificados, pues en la naturaleza no existen sistemas anticipativos. Por otra parte, la propiedad de pasividad es fácil de verificar en muchos casos a través de conocimiento físico a priori del sistema (por ejemplo, si el sistema es una red eléctrica compuesta sólo por elementos pasivos). Además, es sabido que si se tiene un sistema pasivo, es estabilizado con cualquier controlador estrictamente pasivo en realimentación negativa, y la interconexión de sistemas pasivos es también un sistema pasivo. Por ende, resulta de interés forzar ambas propiedades al modelo que se sabe causal o pasivo.

Entonces, resulta evidente que incorporando estos conocimientos previos del sistema en los métodos de identificación no paramétrica ya existentes, no sólo será útil a nivel de restricción a sistemas con características particulares, sino que además en el caso particular de la ETFE se deben conseguir resultados más cercanos al sistema real, que serán de gran utilidad para tener mejores ideas sobre las propiedades frecuenciales y temporales del sistema por identificar.

1.1. Estado del arte

En la literatura científica hay diversos análisis, estudios y mejoras hechas a algoritmos no paramétricos en frecuencia, y también casos particulares de restricciones de causalidad y pasividad.

En identificación, muchos métodos se han desarrollado con el objetivo de obtener modelos que presenten el menor error cuadrático medio posible, la menor varianza posible, o el menor sesgo posible [2]. Un ejemplo clásico de esto es [12], en donde se intenta obtener mejores resultados en varianza aplicando, en este caso, una reducción de modelos adecuada. También se estudian las propiedades estocásticas y comparaciones entre distintos estimadores en [13]. Otro estudio relacionado es [8], en donde se pretende mejorar los estimadores no paramétricos en sentido cuadrático medio (MSE) bajo un enfoque de promedios no lineales.

En cuanto a mejoras y estudios de las distintas técnicas en identificación no paramétrica, distintos artículos y capítulos de libros se han presentado exponiendo las principales virtudes y alcances de los métodos no paramétricos. Por ejemplo, [14] y [7] repasan los métodos y técnicas clásicas y modernas, ambos bajo enfoques semi-históricos.

En [4] se introduce el término “Empirical Transfer Function Estimate”(ETFE), analizando sus principales propiedades en el tiempo y en frecuencia, y la relación entre estos dominios. Además, se plantean y analizan mejoras del estimador incluyendo correlación entre frecuencias, suponiendo que $G_0(e^{j\omega})$ es una función suave en ω . También se estudian las propiedades espectrales de las ventanas, y la aproximación de la ETFE a través de cociente entre densidades espectrales de potencia suavizadas por un proceso de enventanado, la cual se llamará en este trabajo ETFE suavizado. Se han planteado en otros trabajos mecanismos que permiten mejorar las estimaciones producidas por ETFE suavizado. En particular, en [15] y [16] se usa método de polinomio local (“local polynomial method”, LPM) para determinar de forma adaptativa el ancho de la ventana de suavizado.

Recientemente, otros métodos no paramétricos más avanzados en el dominio del tiempo y en frecuencia se han formulado para mejorar las estimaciones de la respuesta a impulso y la respuesta en frecuencia [9, 17, 18].

Un libro que incluye una visión alternativa del estimador ETFE es [19], el cual analiza extensivamente este método de estimación, y se estudian técnicas para estimar la respuesta en frecuencia “frequency response function”(FRF). Anteriormente a estas publicaciones, se había trabajado con los conceptos de análisis espectral y correlación para identificación en [20], aplicados en tiempo continuo esencialmente a problemas de mecánica y acústica. Más sobre estos temas se publicó en [21], extendiendo el trabajo anterior por los mismos autores y con más ejemplos en la práctica.

En cuanto a la causalidad, diversos autores han planteado técnicas de resolución, pero cada uno dentro de su marco específico de trabajo, sin plantear soluciones generales al problema de restricción. En [22], se propone estimar la respuesta de impulso causal de un objetivo debajo del agua, a través de un procedimiento de deconvolución usando Filtro de Wiener, y luego considerando la parte causal dada por la primera mitad de los datos obtenidos por la transformación holomorfa de Wiener-Doob. En [23], para forzar causalidad se establece una relación en frecuencia de las partes reales e imaginarias de la transformada de Fourier continua de la respuesta a impulso de un sistema aerodinámico, para luego obtener los coeficientes de la serie de Fourier asociada a la respuesta a partir de un algoritmo de optimización usando cuadrados mínimos.

Recientemente, se ha introducido la idea de usar la transformada de Hilbert y en particular, la relación de Kramers-Kronig, para forzar causalidad en sistemas dinámicos. En [24], se explota la relación entre parte real y parte imaginaria de la función de transferencia para reconstruir una de éstas a partir de la otra, forzando la relación de Kramers-Kronig. En cambio, en [25] se propone construir una continuación periódica de la función de transferencia en ω , para así imponer causalidad directamente en los coeficientes de la serie de Fourier, obtenidos vía cuadrados mínimos, restringidos a una condición lineal de causalidad dada por Kramers-Kronig.

Además, diversos resultados se han obtenido en los últimos años en relación a la restricción de pasividad en sistemas dinámicos. Sin embargo, el contexto investigado en los trabajos recientes no tiene la generalidad dada por un enfoque teórico en identificación. En [26], se estudia la imposición de pasividad en sistemas lineales con retardos usando las herramientas de desigualdades lineales matriciales (LMI), pero sin incorporar elementos de identificación no paramétrica. Por otra parte, en [27] y [28] se ha estudiado la idea de forzar pasividad en lazo cerrado a través del lema de Yakubovich-Kalman-Popov en conjunto con optimización lineal.

En la literatura estudiada, se trata generalmente el problema de manejo de datos en parámetros-S o parámetros de dispersión, investigación asociada principalmente al área de Telecomunicaciones. El concepto de pasividad es de particular interés en esta área, pues se espera que los modelos obtenidos sean fiel reflejo de esquemas de redes eléctricas lineales pasivas. En [29] se resuelve de manera sencilla la restricción de pasividad en los parámetros-S, al descomponer los parámetros-S tabulados por descomposición en valores singulares (SVD), y forzando directamente que los valores singulares no superen la unidad. Métodos más sofisticados se han estudiado en [30] y [31]. En [30], se explota la idea de perturbar los valores singulares de la matriz de parámetros-S tal que sean todos menores que uno, y traduciendo esta restricción a una restricción matricial lineal, manipulable fácilmente con herramientas computacionales. Por otra parte, [31] restaura la propiedad de pasividad a través de la perturbación directa de la matriz de parámetros-S, y resolviendo un problema de desigualdades lineales matriciales para obtener la matriz de perturbación.

Ninguno de los estudios anteriormente mencionados sobre imponer causalidad o pasividad toman en consideración las propiedades estadísticas de los estimadores para la minimización de sesgo o varianza. En conclusión, es razonable afirmar que el problema propuesto no ha sido resuelto en la literatura. Se han expuesto algunos enfoques actuales e interesantes al problema de estimación no paramétrica con restricciones de causalidad o pasividad, pero corresponden a resultados particulares para campos de investigación ajenos, y son carentes de formalidad matemática necesaria para considerar éstos como avances significativos al área de identificación de sistemas.

1.2. Identificación de problemas

En el contexto expuesto en los párrafos anteriores, hay una serie de problemas que aparecen por resolver. Algunos de ellos se enuncian a continuación:

- El problema central es encontrar una relación directa en el dominio del tiempo y frecuencia que permita obtener los estimadores no paramétricos por análisis espectral de forma explícita y mostrar la eficacia de los métodos para ambos tipos de restricción.
- Uno de los grandes problemas o desafíos en el desarrollo de un nuevo método de identificación es su profundidad teórica. El método debe ser formulado de manera general, suponiendo la menor cantidad de limitaciones estructurales posible, esto es, con la posible inclusión de condiciones iniciales y tratamiento con estructuras generales, y que permitan obtener un resultado valioso para el campo en la actualidad.
- Dado que la literatura considera el efecto de las ventanas en frecuencia como una mejora innata al análisis espectral básico, un problema de interés es replicar un resultado extendido para casos en los cuales se determinan las densidades espectrales de potencia con ventanas distinta a la rectangular. Esto sin duda representaría un gran avance, pues al conseguir mejores resultados que los que se presentan en la actualidad con ventanas en frecuencia, se ampliarían las proyecciones del método y su alcance.
- En el caso de la restricción de pasividad, se encuentra un problema a nivel conceptual de bastante interés. Se debe investigar cuáles son los alcances del método, en cuanto a primero notar bajo qué condiciones se obtienen sistemas pasivos bajo discretización, y cuáles son las implicancias asociadas a este caso.
- Un problema evidente es la simulación efectiva aplicada a un caso lo más general posible. Gracias al software disponible hoy en día como MATLAB y Mathematica, para muchas aplicaciones no resulta difícil el cómputo directo. Sin embargo, la problemática existe en la creación de ejemplos y casos patológicos donde se distinga con claridad en qué está fallando el método tradicional (en qué casos se obtiene modelos no causales/no pasivos), la ganancia producida con el nuevo método de identificación y en qué aspectos.
- Finalmente, luego de obtener los posibles métodos novedosos de estimación forzando las propiedades presentadas, se debe entender su complejidad computacional y aspectos prácticos asociados a los estimadores construidos.

Las interrogantes anteriores sirven de motivación para el desarrollo de la presente tesis. Como se puede apreciar en la revisión bibliográfica, estos cuestionamientos no han sido resueltos.

1.3. Principales contribuciones

Las principales contribuciones de esta tesis son:

- Explicar la no causalidad del estimador ETFE a través de la deducción explícita de la respuesta a impulso estimada.
- Desarrollar una mejora al método tradicional de la ETFE imponiendo en su formulación condiciones de causalidad en el dominio del tiempo. Primero, se estudia el problema para modelos output error con condiciones iniciales cero, para después desarrollar un método considerando condiciones iniciales distintas de cero y estructuras generales de modelos.
- Formular una mejora al método ETFE con inclusión de ventanas no rectangulares, imponiendo causalidad en este nuevo escenario.
- Demostrar la eficacia de forma teórica del método causal desarrollado y sus principales alcances, para luego comprobar lo obtenido a través de simulación y así distinguir las principales ventajas y problemas con respecto al método ETFE tradicional.
- Mostrar los alcances de la teoría de imposición de pasividad en sistemas discretos, caracterizando en qué casos tiene sentido aplicar esta restricción.
- Describir un conjunto de técnicas que permiten imponer pasividad en el dominio de la frecuencia, respaldadas por la literatura reciente y por simulaciones básicas.

1.4. Organización del documento

El trabajo desarrollado contempla 8 capítulos (incluyendo éste). Los contenidos de cada capítulo se describen a continuación:

Capítulo 2: Se presenta el marco teórico en el cual se desarrolla esta tesis.

Capítulo 3: Se deduce el estimador de la respuesta a impulso por ETFE. Se determinan sus propiedades de media y covarianza, y se deduce la no causalidad del estimador, la cual es dependiente de la entrada.

Capítulo 4: Se implementa el estimador anteriormente deducido. Se estudian las consideraciones de implementación, y se propone una señal de entrada que entrega estimaciones causales. Adicionalmente, se realizan diversas simulaciones con el fin de entender los resultados obtenidos por el estimador frente a diversas señales de entrada, ruido y efectos promediados, entre otros parámetros.

Capítulo 5: Se introduce un estimador ETFE que impone causalidad. Además de explicar la formulación básica, se desarrollan sus principales propiedades a partir de teoremas, y se comprueban éstos en simulación con diversos sistemas, todos obtenidos bajo el esquema output error.

Capítulo 6: Se desarrollan las principales extensiones a los resultados obtenidos en el capítulo 5. Se estudia el caso donde las condiciones iniciales no necesariamente son cero, y se propone e implementa el estimador ETFE causal en estructuras generales. Finalmente, se desarrolla el estimador de la respuesta a impulso por ETFE suavizado, es decir, con la inclusión de ventanas no rectangulares para estimar las densidades espectrales de potencia. Lo anterior se complementa con simulaciones en diversos sistemas.

Capítulo 7: Se discute el concepto de pasividad, y su expresión en sistemas lineales estables. Se relaciona este concepto con las funciones reales positivas, y se estudia el efecto de la discretización en la conservación de la propiedad. Finalmente, se analizan las propiedades de media y covarianza del estimador ETFE en el dominio de la frecuencia, y se entregan diversas opciones para forzar pasividad en este método de estimación.

Capítulo 8: Se presentan las conclusiones de esta tesis y algunas ideas para trabajo futuro.

MARCO TEÓRICO

2.1. Introducción

El presente capítulo muestra el marco teórico general en el cual se desarrolla esta tesis. Se describe brevemente la disciplina de identificación de sistemas, sus problemas y objetivos principales, y las técnicas clásicas de estimación no paramétrica. Finalmente, se introduce la “función de transferencia empírica estimada”(ETFE), estimador no paramétrico esencial para el desarrollo de esta tesis. Al término de este capítulo se mencionan brevemente los conceptos de causalidad y pasividad, los cuales se pretenden imponer sobre el estimador no paramétrico ETFE. La mayor parte del material de esta sección se puede encontrar con un mayor nivel de detalle en [1–4, 7, 14, 32]. Otros temas, más específicos, son definidos oportunamente en las secciones donde son utilizados.

2.2. Identificación de sistemas

La obtención de modelos que permitan describir la realidad física forma parte esencial en el desarrollo de la ciencia. Modelos son representaciones del objeto de estudio. Como tales, no necesariamente describen perfectamente la realidad, sino que se desarrollan con tal de expresar los comportamientos esenciales de ésta. Por supuesto, lo esencial dependerá del propósito del modelo y la tolerancia al error, sea como sea definido en la aplicación correspondiente. Los modelos, luego de ser obtenidos, pueden ser validados según qué tan bien predicen fenómenos o salidas de acuerdo a una causa específica o entrada.

La obtención de un modelo puede ser llevada a cabo a través de un análisis fenomenológico, haciendo uso de las leyes fundamentales de la física (balances de energía, masa, momento, etc), o bien a través de la experimentación y uso de datos de ésta. Identificación de sistemas trata con el problema de construir modelos matemáticos de sistemas dinámicos basado en datos de entradas y salidas observadas. Los modelos obtenidos por identificación de sistemas tienen las siguientes propiedades, en contraste con los modelos obtenidos basado solamente en modelamiento físico:

- Tienen validez limitada dentro de un punto de operación. Si se cambian las condiciones de entorno (distinta secuencia de entrada, cambio en las dinámicas del sistema, o en parámetros relevantes), la representación obtenida por identificación de sistemas puede carecer de utilidad en estos nuevos escenarios.

- No aportan sentido físico, en cuanto a que las relaciones obtenidas no son forzadas a priori por leyes físicas. Los modelos obtenidos por identificación son dependientes de la estructura escogida y por ende, a diferente estructura, diferentes son las representaciones, todas las cuales potencialmente pueden ser igual de válidas para el uso del modelo.
- Son relativamente fáciles de construir y de usar, en cuanto a que el tratamiento de un sistema complejo en dinámicas requerirá mucho más trabajo matemático para la obtención del modelo físico, pero prácticamente igual cantidad de esfuerzo en identificación que un modelo más sencillo.

Si bien también es factible y a veces necesario proponer estructuras no lineales para identificación, es muy común que los sistemas identificados se postulen estructuralmente como lineales en cierto punto de operación. Por lineal, se entiende que la salida del sistema producto de una combinación lineal de las entradas es la combinación lineal de las salidas asociadas a cada entrada [33]. En identificación de sistemas con modelos lineales, la estimación de la ecuación diferencial para el caso de sistemas de tiempo continuo, y la ecuación recursiva para sistemas de tiempo discreto, es equivalente a la estimación de la función de transferencia [34]. Ésta permite representar analíticamente la relación entre la salida y entrada de un sistema lineal e invariante en el tiempo bajo condiciones iniciales cero. Diferentes representaciones de la función de transferencia juegan roles importantes para la descripción y análisis de las propiedades de los sistemas, y el diseño de controladores.

2.2.1. Objetivos y problemas en identificación

Hay muchas razones por las cuales se requiere describir matemáticamente un proceso. Ya sea conocer más sobre éste, analizando sus propiedades físicas a través de las relaciones fundamentales que satisface, o bien para un propósito más utilitario: el ocupar este modelo para motivos de control. El enfoque en identificación de este trabajo será para propósitos de control. Las diferencias fundamentales con el primer objetivo planteado son las estructuras de modelos y la precisión con las cuales se pretende trabajar. Un modelo con fines de control debe capturar las dinámicas esenciales del sistema, obviando posiblemente características físicas presentes en la relación entrada-salida. Comúnmente existen perturbaciones, errores de medición y entradas no controlables, las cuales se incorporan al modelo sólo si al conocer esta información se logra un control más robusto o de mayor calidad y velocidad.

Dentro de los problemas recurrentes para resolver el problema de identificación de sistemas para el propósito de control, se encuentran:

1. Diseño de experimento: Para identificar un sistema, es necesario obtener datos de entrada y salida. Para obtener la mayor cantidad de información del sistema, se debe escoger una señal de entrada apropiada. Por apropiada uno se refiere a
 - a) que logre excitar el sistema en las frecuencias de interés,
 - b) que tenga energía suficiente para garantizar una buena relación señal a ruido, pero sin excitar no linealidades muy importantes,

- c) que sea lo suficientemente extensa para recopilar datos de identificación y de validación pero que no perturbe en demasía el funcionamiento normal del proceso, y
- d) que sea fácil de generar y replicar.

Además de la selección y generación de la señal de entrada, deben considerarse posibles lazos de realimentación en el sistema, el período de muestreo y el prefiltrado de los datos previo a la estimación paramétrica, entre otros aspectos [2].

2. Determinación de la estructura del modelo: En [2], se menciona que este paso es, sin lugar a dudas, el más importante y más difícil en identificación. Se debe escoger un conjunto de modelos candidatos, especificándose dentro de la colección de modelos, aquéllos que son razonables. Para definir qué se entiende por razonable, es de extrema utilidad tener conocimientos a priori del sistema por identificar. Esto puede hacerse haciendo un análisis físico del sistema, para finalmente estimar aquellos parámetros que son desconocidos o calculados con baja precisión. Este tratamiento se conoce como *grey box modelling* [35]. Una alternativa a *grey box modelling*, es obtener información a partir de experimentación. Con técnicas no paramétricas, es posible obtener ideas iniciales sobre la complejidad del modelo, el orden de éste, y la presencia de retardos y dinámicas dominantes. Más sobre este punto se discutirá en la próxima subsección, pues corresponde a los fundamentos esenciales de esta tesis.
3. Elección de método para estimar los parámetros: Ya obtenida la estructura del modelo, se debe escoger una estrategia que permita seleccionar el mejor modelo del conjunto. Esto se lleva a cabo determinando los parámetros que definen el espacio de la colección de modelos. El modelo resultante debe ajustarse con precisión a los datos obtenidos inicialmente. La medición de la calidad del modelo generalmente define un problema de optimización, el cual se resuelve explícitamente o numéricamente, de acuerdo a la estrategia de identificación adoptada. En [1] y [2] se deducen y analizan distintos métodos tales como cuadrados mínimos, variables instrumentales y métodos del error de predicción, entre otros. Se refiere al lector a [1] y [2] para una discusión más detallada sobre dichos métodos.
4. Validación: Después de conseguir un modelo particular que mejor describe los datos obtenidos de acuerdo al criterio escogido, debe evaluarse qué tan bien representa este modelo al sistema real. El problema de validación consiste básicamente en formar argumentos para tomar la decisión de conservar el modelo obtenido, o rechazarlo.

Como se mencionó anteriormente, la elección de la estructura del modelo es crucial para el resultado final en identificación. En este contexto, la presente tesis se enfoca en la estimación no paramétrica, la cual es introducida a continuación.

2.2.2. Estimación no paramétrica y ETFE

Históricamente en el área de identificación de sistemas, se ha distinguido entre los métodos de estimación que eligen un modelo dentro de una clase no parametrizada, y aquellos algoritmos que estiman un número finito de parámetros de algún modelo estructurado. Los primeros se conocen como métodos no paramétricos [14]. Estos métodos ofrecen modelos en forma de curvas o funciones, las que en general no pueden representarse con un vector de parámetros de dimensión finita.

La ventaja de estos métodos es que no requieren mucha información estructural del sistema para ser utilizados. Sus principales usos son

- a) para verificar la calidad del experimento de identificación distinguiendo por ejemplo, la relación señal a ruido;
- b) para obtener una visión general sobre las dinámicas del sistema, discriminando así el nivel de complejidad requerido en la estructura de modelos; y
- c) para validar el modelo paramétrico obtenido y el modelo del ruido presente en éste.

Dentro de estas estrategias de estimación se encuentran métodos en el dominio del tiempo, como son la estimación de la respuesta a impulso y la respuesta a escalón, las cuales son útiles para estimar retardos de tiempo, relaciones causa y efecto, ganancia de estado estacionario y constante de tiempo dominante, entre otros.

Además de la estimación de la respuesta a impulso y la respuesta a escalón, existen métodos más avanzados en esta área, como son las estimaciones por análisis frecuencial, análisis correlacional, y análisis espectral. Este último es el método a analizar en esta tesis.

Un modelo comúnmente usado es el modelo *output error* (OE), el cual se expresa como

$$y_t = \sum_{k=0}^{\infty} h_k u_{t-k} + v_t, \quad (2.2.1)$$

donde $\{y_t\} \in \mathbb{R}^{n_y}$, $\{u_t\} \in \mathbb{R}^{n_u}$ y $\{v_t\} \in \mathbb{R}^{n_v}$ son las secuencias de salida, entrada y perturbación respectivamente. La secuencia $\{h_k\}_{k \geq 0} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_u}$ es la respuesta a impulso del sistema. Es decir, la salida se forma a partir de la convolución entre las secuencias de entrada y respuesta a impulso, sumada por una perturbación en la salida. Si se supone que $\{u_t\}$ es un proceso estocástico estacionario independiente de $\{v_t\}$, entonces la siguiente relación (conocida como la ecuación de Wiener-Hopf, [1]) es válida para las funciones de covarianza cruzada:

$$R_{yu}(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k R_u(\tau - k) \quad (2.2.2)$$

donde, suponiendo $E\{y_t\} = E\{u_t\} = 0$, las funciones de covarianza se calculan como $R_{yu}(\tau) = E\{y_{t+\tau} u_t\}$ y $R_u(\tau) = E\{u_{t+\tau} u_t\}$, con $E\{\cdot\}$ el operador esperanza. Las funciones de covarianza en (2.2.2) pueden estimarse a partir de los datos con

$$\hat{R}_{yu}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1-\min(\tau,0)}^{N-\max(\tau,0)} y_{t+\tau} u_t \quad \tau = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.2.3)$$

$$\hat{R}_u(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-\tau} u_{t+\tau} u_t \quad \hat{R}_u(-\tau) = \hat{R}_u(\tau) \quad \tau = 0, 1, 2, \dots \quad (2.2.4)$$

Aplicando la transformada de Fourier en tiempo discreto (ver Apéndice, Sección A.2) en (2.2.2), se obtiene la siguiente relación entre las densidades espectrales de potencia (*power spectral density* o PSD por sus siglas en inglés [3]):

$$\Phi_{yu}(\omega) = H(e^{j\omega}) \Phi_u(\omega), \quad (2.2.5)$$

donde

$$\Phi_{yu}(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{yu}(\tau)e^{-j\omega\tau}, \quad (\text{PSD cruzada de } u \text{ a } y) \quad (2.2.6)$$

$$\Phi_u(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_u(\tau)e^{-j\omega\tau}, \quad (\text{PSD de } u) \quad (2.2.7)$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k e^{-j\omega k}. \quad (\text{Respuesta en frecuencia del sistema}) \quad (2.2.8)$$

Entonces, la estimación de la respuesta en frecuencia por análisis espectral es

$$\hat{H}(e^{j\omega}) = \frac{\hat{\Phi}_{yu}(\omega)}{\hat{\Phi}_u(\omega)}, \quad (2.2.9)$$

donde $\hat{\Phi}_{yu}(\omega)$ y $\hat{\Phi}_u(\omega)$ corresponden a las estimaciones de las densidades espectrales de potencia $\Phi_{yu}(\omega)$ y $\Phi_u(\omega)$ respectivamente. El método de estimación en (2.2.9) es estudiado en detalle en esta tesis.

Diferentes opciones de este método serán obtenidas de acuerdo a cómo se estiman las densidades espectrales de potencia. Una posibilidad consiste en truncar (2.2.6) y (2.2.7) a $\pm N$, insertar (2.2.3) y (2.2.4) respectivamente, para obtener

$$\hat{\Phi}_{yu}(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{t=1}^N y_k u_t e^{-j\omega k} e^{j\omega t} = Y_N(e^{j\omega}) \bar{U}_N(e^{j\omega}), \quad (2.2.10)$$

$$\hat{\Phi}_u(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{t=1}^N u_k u_t e^{-j\omega k} e^{j\omega t} = |U_N(e^{j\omega})|^2, \quad (2.2.11)$$

donde $Y_N(e^{j\omega})$ e $U_N(e^{j\omega})$ son las transformadas de Fourier en tiempo discreto de u_t e y_t respectivamente, con $t = \{1, 2, \dots, N\}$:

$$Y_N(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N y_k e^{-j\omega k} \quad (2.2.12)$$

$$U_N(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N u_k e^{-j\omega k}. \quad (2.2.13)$$

De esta forma, por (2.2.9) se obtiene la *estimación de la función de transferencia empírica* (ETFE) [4]:

$$\hat{H}(e^{j\omega}) = \frac{Y_N(e^{j\omega})}{U_N(e^{j\omega})}. \quad (2.2.14)$$

El estimador ETFE será analizado con profundidad en los capítulos siguientes. Cabe destacar que este método de identificación no paramétrica puede estudiarse como la extensión del método de respuesta en frecuencia, el cual basa su análisis en los efectos en magnitud y desfase producidos por sinusoidales en la señal de entrada, y en la correlación de la señal de salida con sinusoidales. Para

una descripción más detallada, se recomienda revisar [4, 36].

El cálculo de la ETFE por (2.2.14) entrega resultados pobres, en cuanto a que las funciones de covarianza son imprecisas para grandes valores de τ , dado que se ocupan muy pocos términos. Otra posibilidad para determinar explícitamente el estimador (2.2.9) consiste en ponderar los valores de las funciones de covarianza en función de τ , acentuando los valores de las funciones de covarianza que tienen mayores términos. Esto matemáticamente se hace introduciendo una ventana de ponderación $w_\gamma(\tau)$ con parámetro de forma $\gamma > 0$, tal que las nuevas estimaciones de las PSD son

$$\hat{\Phi}_{yu}(\omega) = \sum_{\tau=-N}^N \hat{R}_{yu}(\tau) w_\gamma(\tau) e^{-j\omega\tau} \quad (2.2.15)$$

$$\hat{\Phi}_u(\omega) = \sum_{\tau=-N}^N \hat{R}_u(\tau) w_\gamma(\tau) e^{-j\omega\tau}. \quad (2.2.16)$$

Esta idea también puede estudiarse en el dominio de la frecuencia, observando que las PSD corresponden a las transformadas de Fourier en tiempo discreto de la multiplicación de secuencias de funciones de covarianza con ventanas de ponderación, lo cual es equivalente a una convolución en frecuencia:

$$\hat{\Phi}_{yu}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi - \omega) Y_N(e^{j\xi}) \bar{U}_N(e^{j\xi}) d\xi \quad (2.2.17)$$

$$\hat{\Phi}_u(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi - \omega) |U_N(e^{j\xi})|^2 d\xi, \quad (2.2.18)$$

donde $W_\gamma(\omega)$, ventana en frecuencia, es la transformada de Fourier en tiempo discreto de $w_\gamma(\tau)$:

$$W_\gamma(\omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} w_\gamma(\tau) e^{-j\omega\tau}.$$

La idea de incorporar una ventana de ponderación mejora estadísticamente el estimador ETFE, haciendo que su covarianza frecuencia a frecuencia disminuya, a costa de perder en sesgo [4]. Dado que no se requieren más datos para obtener este estimador que para el estimador ETFE tradicional, resulta de gran utilidad a modo de validación de los resultados obtenidos por otros estimadores, y en cuanto a complejidad, pese a ser levemente más difícil de implementar en software, los resultados obtenidos son bastante más convincentes que sin ventana o ventana rectangular en el dominio del tiempo.

La estimación de la respuesta en frecuencia obtenida con el cociente de espectros incluyendo una ventana de ponderación se llamará *ETFE Suavizado*, y se estudiará en detalle en el Capítulo 6.

2.3. El problema de causalidad y pasividad

Tal como se ha mencionado anteriormente, el objetivo de esta tesis es estudiar si es posible imponer condiciones de causalidad y pasividad al método de estimación no paramétrica conocido como análisis espectral. Antes de analizar a fondo este problema, es necesario tener en consideración los conceptos de causalidad y pasividad que serán estudiados más adelante en esta tesis.

2.3.1. Causalidad

La causalidad es una propiedad intrínseca que poseen prácticamente todos los sistemas reales. Un sistema es causal si no muestra cambios en la señal de salida hasta que hayan cambios en la entrada, es decir, los efectos (salidas) no pueden preceder las causas de ese efecto (entradas). Formalmente, se dice que un sistema en tiempo discreto es *causal* [37] si para cada t_0 la secuencia de salida y_t en el índice $t = t_0$ depende únicamente los valores de la secuencia de entrada para $t \leq t_0$. Si $t < t_0$ en la última condición, se dice que el sistema discreto es *estrictamente causal*.

En sistemas discretos lineales e invariantes en el tiempo, la causalidad se reduce a que la secuencia respuesta a impulso h_t sea una secuencia causal, esto es

$$h_t = 0 \text{ para todo } t < 0, t \in \mathbb{Z}. \quad (2.3.1)$$

La definición (2.3.1) será esencial en el desarrollo de métodos que logren imponer esta condición en estimaciones de la respuesta a impulso. Esta condición también puede estudiarse en el dominio de la frecuencia, a través de las relaciones de Kramers-Kronig [10, 38, 39], las cuales establecen condiciones sobre la parte real y parte imaginaria de la transformada de Fourier en tiempo discreto de la respuesta a impulso, es decir, para sistemas estables, de la respuesta en frecuencia:

$$\text{Im}\{H(e^{j\omega})\} = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Re}\{H(e^{j\theta})\} \cot\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right) d\theta, \quad (2.3.2)$$

$$\text{Re}\{H(e^{j\omega})\} = h_0 + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Im}\{H(e^{j\theta})\} \cot\left(\frac{\omega - \theta}{2}\right) d\theta. \quad (2.3.3)$$

Se remite al lector a [39] para mayor análisis sobre estas condiciones.

En relación con el problema de identificación, los métodos de estimación no paramétricos mencionados, en particular el método de análisis espectral y ETFE, no consideran esta información en la estimación. Por ende si se usara la restricción de obtener sistemas causales de alguna forma en la estimación, es de suponer que las estimaciones serán mejores en cierto sentido estadístico. De esta forma, puede forzarse la causalidad y al mismo tiempo, mejorar (o al menos no empeorar) las características de media y matriz de covarianza del estimador.

2.3.2. Pasividad

El control de procesos basado en conceptos de pasividad, es decir, el diseño de controladores y análisis de sistemas pasivos, es un área emergente en control automático. Diversos textos se han escrito en las últimas décadas con respecto a esta materia [40–42]. Su origen se remonta a la teoría de redes y síntesis de circuitos eléctricos [43], en la cual se consideran circuitos pasivos aquellos formados por combinaciones de resistencias, condensadores, inductores y posiblemente de transformadores y giradores, todos de valores constantes.

Sistemas pasivos son una clase de procesos que disipan cierto tipo de energía física o virtual, expresadas comúnmente con funciones tipo Lyapunov. En los sistemas pasivos la tasa de energía que fluye al sistema no es menor al aumento de energía almacenada. En otras palabras, un sistema pasivo no puede almacenar más energía que la obtenida desde el exterior, en donde la diferencia de éstas corresponde a la energía disipada.

Definida como una propiedad de entrada-salida de un sistema, la propiedad de pasividad es útil para análisis de estabilidad en sistemas interconectados, como también para estudiar e imponer robustez en sistemas de control. La definición matemática de pasividad se estudia en detalle en el Capítulo 7.

A diferencia de la propiedad de causalidad, la pasividad no es una característica tan común en sistemas. Sin embargo, si se sabe de antemano que un sistema es pasivo, resulta intuitivo pensar que se puede mejorar la estimación obtenida por análisis espectral (y en general, por cualquier método de estimación) imponiendo esta condición dentro del método. Así, se pretende mejorar las características estadísticas del estimador, consiguiendo mejores resultados en la práctica.

2.4. Resumen

El capítulo resume la teoría subyacente al trabajo desarrollado en esta tesis. Desde la generalidad, se hace una reseña sobre el área de identificación de sistemas, campo en el cual se desarrolla este trabajo. En particular, se introduce el método de estimación no paramétrica llamado análisis espectral, el cual se pretende estudiar en detalle. Además de dar a conocer su cómputo, características, aplicaciones y alcances, se menciona la idea base detrás del trabajo: mientras más información correcta/validada se tenga sobre un sistema por identificar, el uso de esta información en el proceso de identificación debe mejorar el desempeño del estimador y, por ende, de los resultados obtenidos. Esta idea, vaga por el momento, se explotará en los capítulos siguientes al estudiar la imposición de las condiciones de causalidad y pasividad (ambas introducidas, definidas y explicadas en este capítulo) en análisis espectral y en particular, en el estimador de la función de transferencia empírica ETFE.

CAUSALIDAD: ANÁLISIS TEÓRICO DEL ESTIMADOR DE LA RESPUESTA A IMPULSO POR ETFE, MODELO OE

3.1. Introducción

En el marco teórico descrito en el Capítulo 2 se mencionó el estimador ETFE como un método básico de identificación no paramétrica, resaltando sus principales características y propiedades. Este capítulo introduce y analiza el estimador ETFE aplicado a un sistema modelado con la estructura output error, la cual se reconoce como una estructura básica para propósitos de modelado. Además de expresar el estimador en frecuencia, se determina explícitamente el estimador en el dominio del tiempo, es decir, la estimación de la respuesta a impulso del sistema lineal. A conocimiento del autor, este resultado no ha sido cubierto expresamente en la literatura de la materia, y es importante en cuanto sienta las bases para la imposición de la propiedad de causalidad en el estimador.

El objetivo último de este capítulo es familiarizarse con el estimador ETFE, estudiando sus propiedades de media y matriz de covarianza, y analizando los resultados teóricos obtenidos para encontrar condiciones en donde se tiene causalidad o no causalidad, la cual puede reconocerse de forma más fácil en el dominio del tiempo. Las herramientas matemáticas requeridas en este capítulo se encuentran en el Apéndice, Secciones A.2 y A.3.

3.2. Dedución del estimador de la respuesta a impulso

El objetivo de esta sección es obtener explícitamente el estimador de la respuesta a impulso por ETFE, esto es, la transformada de Fourier inversa del cociente de las transformadas de Fourier de salida y entrada de un sistema. Para esto, se estudia el siguiente sistema discreto, lineal e invariante en el tiempo sujeto a condiciones iniciales cero, modelado con una estructura output error

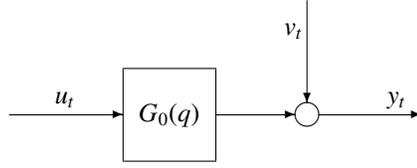


Figura 3.1: Diagrama de bloques de estructura *output error*.

$$y_t = G_0(q)u_t + v_t \quad (3.2.1)$$

$$= \sum_{k=0}^{t-1} g_k^0 u_{t-k} + v_t, \quad t = 1, \dots, N, \quad (3.2.2)$$

donde $\{v_t\}$ es un proceso de ruido blanco de media cero y varianza σ^2 . $G_0(q)$ representa el modelo exacto del sistema lineal, escrito en función del operador de adelanto¹ q . Sujeto a condiciones iniciales iguales a cero, se obtiene el estimador ETFE (empirical transfer function estimate, [4]) como el cociente de las transformadas de Fourier en tiempo discreto (DTFT) de las señales de salida y entrada, a partir del cálculo expresado a continuación:

$$\begin{aligned} Y_N(e^{j\omega}) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N y_t e^{-j\omega t} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N \sum_{k=0}^{t-1} g_k^0 u_{t-k} e^{-j\omega t} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N v_t e^{-j\omega t}. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

Se denota el último término como $V_N(e^{j\omega})$, y el primero se expresa de forma conveniente gracias al cambio de variable $\tau = t - k$, intercambiando el orden de las sumatorias e introduciendo un cero conveniente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N \sum_{k=0}^{t-1} g_k^0 u_{t-k} e^{-j\omega t} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\tau=1}^{N-k} g_k^0 u_{\tau} e^{-j\omega(k+\tau)} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} g_k^0 e^{-j\omega k} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\tau=1}^N u_{\tau} e^{-j\omega \tau} - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\tau=N-k+1}^N g_k^0 u_{\tau} e^{-j\omega(k+\tau)}. \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

Definiendo la respuesta en frecuencia truncada del sistema $G_0(q)$, y las transformadas de Fourier siguientes

$$G_0^N(e^{j\omega}) = \sum_{t=0}^{N-1} g_t^0 e^{-j\omega t}, \quad U_N(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N u_t e^{-j\omega t}, \quad M_N(e^{j\omega}) = \frac{-1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\tau=N-k+1}^N g_k^0 u_{\tau} e^{-j\omega(k+\tau)}, \quad (3.2.5)$$

se puede reescribir la relación (3.2.1) en el dominio de la frecuencia como

$$Y_N(e^{j\omega}) = G_0^N(e^{j\omega})U_N(e^{j\omega}) + M_N(e^{j\omega}) + V_N(e^{j\omega}).$$

¹El operador de adelanto satisface $qf_k = f_{k+1}$ y $q^{-1}f_k = f_{k-1}$. Para más análisis sobre este operador, ver [44].

De esta manera, se tiene el estimador ETFE

$$\begin{aligned}\hat{G}(e^{j\omega}) &= \frac{Y_N(e^{j\omega})}{U_N(e^{j\omega})} = \frac{G_0^N(e^{j\omega})U_N(e^{j\omega}) + M_N(e^{j\omega}) + V_N(e^{j\omega})}{U_N(e^{j\omega})} \\ &= G_0^N(e^{j\omega}) + \frac{M_N(e^{j\omega}) + V_N(e^{j\omega})}{U_N(e^{j\omega})}.\end{aligned}\quad (3.2.6)$$

De forma análoga al análisis hecho en [4], es posible notar que

$$\begin{aligned}|M_N(e^{j\omega})| &= \left| \frac{-1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\tau=N-k+1}^N g_k^0 u_\tau e^{-j\omega(k+\tau)} \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\tau=N-k+1}^N |g_k^0 u_\tau| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} |g_k^0| k \max_{\tau \in \{1, \dots, N\}} |u_\tau| \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \max_{\tau \in \{1, \dots, N\}} |u_\tau| \sum_{k=0}^{N-1} k |g_k^0| \\ &=: \frac{C_1}{\sqrt{N}}.\end{aligned}\quad (3.2.7)$$

Es decir, suponiendo que la señal $\{u_t\}$ es acotada, y que la suma $\sum_{k=0}^{N-1} k |g_k^0|$ converge para $N \rightarrow \infty$ (lo cual es una suposición de estabilidad del sistema), el término C_1 es finito y por ende $|M_N(e^{j\omega})|$ tiende a cero para todo ω a medida que $N \rightarrow \infty$. Esta observación es importante para el cálculo de la esperanza, que se verá en la sección siguiente.

De aquí en adelante, haciendo el cambio de variable $t = k + 1$, se considerará $M_N(e^{j\omega})$ como

$$M_N(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{\tau=N-k+1}^N g_k^0 u_\tau e^{-j\omega(k+\tau)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N \left(\sum_{\tau=N-t}^N g_{t-1}^0 u_\tau e^{-j\omega(\tau-1)} \right) e^{-j\omega t} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N m_t e^{-j\omega t},$$

donde se ha denotado $m_t := \sum_{\tau=N-t}^N g_{t-1}^0 u_\tau e^{-j\omega(\tau-1)}$.

Continuando con el desarrollo anterior, nótese que

$$\begin{aligned}M_N(e^{j\omega}) + V_N(e^{j\omega}) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N (m_t + v_t) e^{-j\omega t} \xrightarrow{e^{j\omega}=z} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N (m_t + v_t) z^{-t} \\ U_N(e^{j\omega}) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N u_t e^{-j\omega t} \xrightarrow{e^{j\omega}=z} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N u_t z^{-t} = \frac{z^{N-1} u_1 + z^{N-2} u_2 + \dots + u_N}{\sqrt{N} z^N} =: \frac{N_U(z)}{z^N}.\end{aligned}\quad (3.2.8)$$

Se puede descomponer $z^N (N_U(z))^{-1}$ como la suma de dos funciones racionales $P(z)$ y $Q(z)$, donde $P(z)$ contiene todos los polos de $z^N (N_U(z))^{-1}$ que se encuentran en la circunferencia unitaria $|z| = 1$, y $Q(z)$ contiene los polos restantes:

$$\frac{z^N}{N_U(z)} = P(z) + Q(z).\quad (3.2.9)$$

El objetivo es poder expresar $z^N(N_U(z))^{-1}$ evaluado en $z = e^{j\omega}$ como la transformada de Fourier de alguna secuencia α_r . Para esto, en primer lugar se trabajará $Q(z)$.

Dado que $Q(z)$ no tiene polos en $|z| = 1$, se expresa $Q(z)$ en términos de su serie de Laurent [45] analítica en $|z| = 1$ como

$$Q(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k^Q z^{-k}. \quad (3.2.10)$$

Los polos estables de $Q(z)$, que equivalen a los polos estables de $z^N(N_U(z))^{-1}$, producen una extensión en potencias negativas de z , mientras que polos en $|z| > 1$ producen potencias positivas. Esto se muestra en los siguientes ejemplos ilustrativos:

Ejemplo 3.2.1. $f(z) = \frac{z}{z-c}$, con $|c| < 1$:

$$f(z) = \frac{1}{1-\frac{c}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} c^k z^{-k}, \quad |z| > |c|. \quad (3.2.11)$$

Ejemplo 3.2.2. $g(z) = \frac{1}{z-\frac{1}{c}}$, con $|c| < 1$:

$$g(z) = \frac{-c}{1-cz} = -c \sum_{k=0}^{\infty} c^k z^k = -c \sum_{k=-\infty}^0 \left(\frac{1}{c}\right)^k z^{-k}, \quad |z| < \frac{1}{|c|}. \quad (3.2.12)$$

Por otra parte, el tratamiento de $P(z)$ es un poco más complejo. Expandiendo $P(z)|_{z=e^{j\omega}} = P(e^{j\omega})$ en fracciones parciales, se obtiene

$$P(e^{j\omega}) = \sum_{i=1}^R \sum_{k=1}^{k_i} \frac{c_{i,k}}{(e^{j\omega} - e^{j\theta_i})^k}, \quad (3.2.13)$$

donde R es el número de polos distintos de $P(z)$ en $|z| = 1$, denotados como $e^{j\theta_1}, \dots, e^{j\theta_R}$ con $\theta_i \in [0, 2\pi)$, cada uno con multiplicidad k_i , y $c_{i,k}$ son coeficientes complejos.

El objetivo es obtener una expresión para la transformada de Fourier inversa de $P(e^{j\omega})$. Para esto, se recurre a un par de transformada conocido [39]:

$$\mu_t - \frac{1}{2} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{1 - e^{-j\omega}}, \quad (3.2.14)$$

donde μ_t es la función escalón de Heavyside [33]. Entonces, aplicando las propiedades de traslado en tiempo y frecuencia, en conjunto con (3.2.14), se obtiene la siguiente transformada inversa de interés

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left\{ \frac{1}{e^{j\omega} - e^{j\theta_i}} \right\}^{-1} &= \mathcal{F} \left\{ \frac{e^{-j\omega}}{1 - e^{-j(\omega-\theta_i)}} \right\}^{-1} \\ &= e^{j\theta_i(t-1)} \left(\mu_{t-1} - \frac{1}{2} \right) \\ &=: p_t^{\theta_i}. \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

Entonces, aplicando la propiedad de convolución, es posible expresar $P(e^{j\omega})$ como

$$\begin{aligned} P(e^{j\omega}) &= \sum_{i=1}^R \sum_{k=1}^{k_i} \sum_{t=-\infty}^{\infty} c_{i,k}(p_t^{\theta_i} *^{k-1} p_t^{\theta_i}) e^{-j\omega t} \\ &= \sum_{i=1}^R \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_i} c_{i,k}(p_{l-k}^{\theta_i} *^{k-1} p_l^{\theta_i}) e^{-j\omega(l-k)} \\ &= \sum_{t=-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^R \sum_{k=1}^{k_i} c_{i,k}(p_{t-i-k}^{\theta_i} *^{k-1} p_t^{\theta_i}) e^{-j\omega(t-i-k)} \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

$$= \sum_{t=-\infty}^{\infty} \alpha_t^P e^{-j\omega t}, \quad (3.2.17)$$

donde se ha introducido la notación $y_t *^k x_t = \overbrace{y_t * x_t * x_t * \dots * x_t}^{k \text{ veces}}$, con $*$ que denota el operador convolución. Por convención, $y_t *^0 x_t = y_t$.

Es fácil notar que en general se tendrá $\alpha_t^P \neq 0$ para $t < 0$.

Observación 3.2.1. Cabe destacar que la transformada (3.2.14), a diferencia de las transformadas inversas obtenidas para $Q(z)|_{z=e^{j\omega}}$, no proviene de una secuencia absolutamente sumable ni cuadráticamente sumable. Por ende, la interpretación de (3.2.14) debe verse bajo la teoría de las funciones generalizadas [46], en la cual es posible extender rigurosamente el concepto de transformada de Fourier para secuencias que pueden ser expresadas como suma de componentes frecuenciales discretas, como

$$x_k = \sum_{t=-\infty}^{\infty} a_t e^{j\omega_t k}.$$

Dado que la expresión (3.2.16) no es fácil de interpretar con claridad, a continuación se presenta un ejemplo.

Ejemplo 3.2.3. Considere $N_U(z)$ con un par de raíces complejas conjugadas en la circunferencia unitaria, de la forma $z_1 = e^{j\theta}$ y $z_2 = e^{-j\theta}$. A modo de ilustración, sea $P(z)$ dado por

$$P(z) = \frac{z}{(z - e^{j\theta})(z - e^{-j\theta})}. \quad (3.2.18)$$

Expandiendo $P(z)|_{z=e^{j\omega}}$ en (3.2.18) en fracciones parciales, se tiene

$$\begin{aligned} P(z)|_{z=e^{j\omega}} &= \frac{1}{2j \sin(\theta)} \left(\frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - e^{-j\theta}} - \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - e^{j\theta}} \right) \\ &= \frac{1}{2j \sin(\theta)} \left(\frac{1}{1 - e^{-j(\omega-\theta)}} - \frac{1}{z - e^{-j(\omega+\theta)}} \right), \end{aligned}$$

de modo que

$$\alpha_t^P = \mathcal{F}\{P(e^{j\omega})\}^{-1} = \frac{1}{2j \sin(\theta)} \left(e^{j\theta t} \left(\mu_t - \frac{1}{2} \right) - e^{-j\theta t} \left(\mu_t - \frac{1}{2} \right) \right)$$

$$= \left(\mu_t - \frac{1}{2} \right) \frac{\sin(\theta t)}{\sin(\theta)}.$$

Por supuesto, los casos donde $\sin(\theta) = 0$, es decir las raíces $z = 1$ o $z = -1$, están cubiertos sin la necesidad de polos complejos conjugados:

$$\begin{aligned} P(z)|_{z=e^{j\omega}} = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - 1} &\stackrel{DTFT}{\iff} \alpha_t^P = \mu_t - \frac{1}{2}; \\ P(z)|_{z=e^{j\omega}} = \frac{e^{j\omega}}{e^{j\omega} - e^{j\pi}} &\stackrel{DTFT}{\iff} \alpha_t^P = e^{j\pi t} \left(\mu_t - \frac{1}{2} \right) = (-1)^t \left(\mu_t - \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

En las tres posibilidades presentadas, se observa que $\alpha_t^P \neq 0$ para $t < -1$. Esto es crucial en el análisis posterior. Además, notamos que en general $\{\alpha_t^P\} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, lo cual no ocurre para α_t^Q , dado que la serie de Laurent de $Q(z)$ debe converger en la circunferencia unitaria.

Con los anteriores análisis en consideración, gracias a (3.2.10) y (3.2.17) se puede expresar $(U_N(e^{j\omega}))^{-1}$ como

$$\frac{1}{U_N(e^{j\omega})} = \frac{e^{j\omega N}}{N_U(e^{j\omega})} = \sum_{t=-\infty}^{\infty} (\alpha_t^P + \alpha_t^Q) e^{-j\omega t} = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \alpha_t e^{-j\omega t}, \quad (3.2.19)$$

donde claramente $\alpha_t = \alpha_t^P + \alpha_t^Q$. Es decir, $(U_N(e^{j\omega}))^{-1}$ se puede escribir como la transformada de Fourier de alguna secuencia $\{\alpha_t\}$. Nótese que para entrada ruido blanco de longitud finita se obtienen raíces de $N_U(z)$ en $|z| = 1$ con probabilidad 0, por ende $\alpha_t^P = 0$ para todo t , con probabilidad 1. Sin embargo, es sabido que a medida que N tiende a infinito, el polinomio $N_U(z)$ concentra sus raíces en el disco unitario [47], lo cual puede traducirse en una desventaja si se trata con una gran cantidad de datos.

Un caso de interés es cuando se excita el sistema con una entrada periódica, situación en la cual $N_U(z)$ tiene raíces en el círculo unitario, como se demuestra en el Capítulo 4. En esta situación, se tiene $\alpha_t^P \neq 0$.

Entonces, por (3.2.8) y (3.2.19), se tiene, tomando $e^{j\omega} = z$,

$$\begin{aligned} \frac{M_N(z) + V_N(z)}{U_N(z)} &= \sum_{t=1}^N (m_t + v_t) z^{-t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k z^{-k} = \sum_{t=1}^N \sum_{k=-\infty}^{\infty} (m_t + v_t) \alpha_k z^{-t-k} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{t=1}^N (m_t + v_t) \alpha_{l-t} z^{-l}. \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

Por lo tanto, se obtiene la expresión exacta para el estimador de la respuesta a impulso por ETFE

$$\hat{G}(e^{j\omega}) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \left(g_t^0 + \sum_{k=1}^N (m_k + v_k) \alpha_{t-k} \right) e^{-j\omega t} \quad (3.2.21)$$

$$=: \sum_{t=-\infty}^{\infty} \hat{g}_t e^{-j\omega t}. \quad (3.2.22)$$

La igualdad en (3.2.21) es el resultado más importante de este capítulo. El estimador no causal de la respuesta a impulso \hat{g}_t puede ser analizado como la suma entre la respuesta a impulso verdadera del sistema, y la convolución entre la señal $(m_t + v_t)$ y la secuencia α_t , obtenida a partir de la transformada inversa de Fourier de $(U_N(e^{j\omega}))^{-1}$. Esta secuencia α_t resulta crucial en el error del estimador, y su orden de magnitud influye directamente sobre el peso que tendrá el ruido en las estimaciones de cada coeficiente de la respuesta a impulso. Ya se mostró que esta secuencia depende únicamente de la señal de entrada. Lamentablemente su interpretación no es directa, dado que la serie de Laurent de la función racional $z^N(N_U(z))^{-1}$ a priori no es fácil de determinar. Sin embargo, existen resultados que permiten caracterizar la secuencia $\{\alpha_t\}$ de acuerdo a la señal de entrada. Más de esto se estudiará en el capítulo siguiente.

Nótese que también puede calcularse \hat{g}_t directamente a partir de la transformada inversa de la respuesta en frecuencia estimada. Suponiendo que $\alpha_i^P = 0$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, otra forma de calcular \hat{g}_t se escribe a continuación ocupando herramientas de variable compleja:

$$\begin{aligned}
\hat{g}_t &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{G}(e^{j\omega}) e^{j\omega t} d\omega \\
&\stackrel{(a)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_0^N(e^{j\omega}) e^{j\omega t} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{M_N(e^{j\omega}) + V_N(e^{j\omega})}{U_N(e^{j\omega})} e^{j\omega t} d\omega \\
&\stackrel{(b)}{=} g_t^0 + \frac{1}{2\pi j} \oint_{z \in \mathbb{C}: |z|=1} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N (m_k + v_k) \alpha_{l-k} z^{t-l-1} dz \\
&\stackrel{(c)}{=} g_t^0 + \frac{1}{2\pi j} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N (m_k + v_k) \alpha_{l-k} \oint_{z \in \mathbb{C}: |z|=1} z^{t-l-1} dz \\
&\stackrel{(d)}{=} g_t^0 + \frac{1}{2\pi j} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N (m_k + v_k) \alpha_{l-k} 2\pi j \delta_{t-l} \\
&\stackrel{(e)}{=} g_t^0 + \sum_{k=1}^N (m_k + v_k) \alpha_{t-k}, \tag{3.2.23}
\end{aligned}$$

donde δ_{t-l} es el delta de Kronecker² en $l = t$, (a) se obtiene usando (3.2.6), (b) usando (3.2.20), (c) se consigue intercambiando integral con sumatoria, (d) se obtiene resolviendo la integral básica de variable compleja, y (e) se consigue ocupando la definición del delta de Kronecker.

Para terminar esta sección, se analiza la parte no causal del estimador. Por (3.2.21), la parte no causal de $\hat{G}(e^{j\omega})$, denotada como $\hat{G}_{nc}(e^{j\omega})$, está dada por

$$\hat{G}_{nc}(e^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{-1} \sum_{k=1}^N (m_k + v_k) \alpha_{l-k} e^{-j\omega l}.$$

Claramente en la parte no causal del estimador sólo influyen los términos de α_t para $t < -1$. Es decir, aquellos coeficientes relacionados con los exponentes positivos de z en la expansión en serie de Laurent de $z^N(N_U(z))^{-1}$. Del análisis anteriormente hecho en (3.2.11) y (3.2.12), sólo se tendrán estos términos a partir de polos inestables de $z^N(N_U(z))^{-1}$. Es decir, las no causalidades en el estimador se producen a partir de raíces con módulo mayor o igual que 1 en el polinomio

²El delta de Kronecker [33] es una señal de tiempo discreto que se define como $\delta_t = 1$ para $t = 0$ y $\delta_t = 0$ en otro caso.

$N_U(z)$, formado directamente a partir de los datos de entrada. Esta afirmación es la conclusión más importante de este capítulo.

Lo anterior supone grandes problemas a nivel de causalidad del estimador, pues fácilmente puede cumplirse la condición de no causalidad producto de la entrada. Por ejemplo, es suficiente que $\left| \frac{u_N}{u_1} \right| \geq 1$ para que al menos un cero de $N_U(z)$ tenga magnitud mayor o igual que 1 [48]. Esto ya es tremendamente restrictivo, dado que no importando los datos que existen entre el primer y último dato, basta un solo dato adicional en la entrada para potencialmente provocar no causalidad en el estimador ETFE. Además de esta restricción, por el criterio de Jury [49, 50], para que el polinomio $N_U(z)$ tenga sólo raíces con módulo menor que 1 es necesario que se satisfagan las siguientes condiciones:

$$N_U(1) > 0 \quad \text{y} \quad (-1)^N N_U(-1) > 0,$$

lo cual restringe aún más el conjunto de secuencias de entrada que provoca causalidad, dado que $N_U(1) > 0$ se puede analizar como un requisito de media positiva en la señal de entrada. Aún así, si la secuencia de entrada admite valores negativos, posiblemente (3.2.24) puede no cumplirse, provocando estimaciones no causales de la respuesta a impulso.

3.3. Análisis de media y covarianza

Ya obtenido explícitamente el estimador de la respuesta a impulso por ETFE, en esta sección se analizan sus propiedades estadísticas, las cuales serán de utilidad para proponer un mejor método de estimación. A continuación se estudian las propiedades de media y covarianza de este estimador en el dominio del tiempo:

3.3.1. Esperanza

La media del estimador de la respuesta a impulso por ETFE se calcula por (3.2.23) como

$$\begin{aligned} E\{\hat{g}_t\} &= E\left\{g_t^0 + \sum_{k=1}^N (m_k + v_k)\alpha_{t-k}\right\} & (3.3.1) \\ &\stackrel{(a)}{=} g_t^0 + \sum_{k=1}^N m_k \alpha_{t-k} + \sum_{k=1}^N E\{v_k\}\alpha_{t-k} \\ &\stackrel{(b)}{=} g_t^0 + \sum_{k=1}^N m_k \alpha_{t-k}, \end{aligned}$$

donde (a) es producto de la linealidad del operador esperanza, y (b) dado que la media del ruido blanco v_k es cero. Cabe destacar que es bien sabido [4] que la respuesta en frecuencia estimada por ETFE es asintóticamente no sesgada frente a una señal de entrada dada por una realización de un proceso estocástico con densidad espectral de potencia $\phi_u(\omega)$ acotada superior e inferiormente y positiva. Esto se cumple gracias al resultado obtenido en (3.2.7), a la condición $C_1 < \infty$, y a que $E\{V_N(e^{j\omega})\} = 0$ para todo ω . Por lo tanto, puede demostrarse bajo estos supuestos que la respuesta a impulso estimada por ETFE es asintóticamente no sesgada. Este análisis riguroso no se hará en este trabajo dado que no es necesario para los resultados posteriores.

3.3.2. Covarianza

Para la covarianza entre dos coeficientes del estimador de la respuesta a impulso, se calcula

$$\begin{aligned}
 E\{(\hat{g}_k - E\{\hat{g}_k\})(\hat{g}_l - E\{\hat{g}_l\})\} &= E\left\{\sum_{t=1}^N v_t \alpha_{k-t} \sum_{r=1}^N v_r \alpha_{l-r}\right\} \\
 &\stackrel{(a)}{=} \sum_{t=1}^N \sum_{r=1}^N E\{v_t v_r\} \alpha_{k-t} \alpha_{l-r} \\
 &\stackrel{(b)}{=} \sigma^2 \sum_{t=1}^N \alpha_{k-t} \alpha_{l-t}, \tag{3.3.2}
 \end{aligned}$$

donde (a) es producto de la linealidad del operador esperanza, y (b) se obtiene gracias a que la varianza del ruido blanco v_k es σ^2 , y sus muestras están no correlacionadas entre sí, por definición de ruido blanco.

3.3.3. Matriz de covarianza

Finalmente, se determina la matriz de covarianza. Ésta se puede determinar por el resultado obtenido en el punto anterior, pero a continuación se muestra una forma alternativa de calcularla. Se sabe que el error de estimación está dado por

$$e_t := \hat{g}_t - E\{\hat{g}_t\} = \sum_{k=1}^N v_k \alpha_{t-k}.$$

Para obtener la matriz de covarianza de los errores de estimación de M datos no causales, hasta el tiempo $t = N$, se puede escribir el error en forma matricial como

$$\mathbf{e} = \mathbf{T}(\beta)\mathbf{v} \tag{3.3.3}$$

donde

$$\mathbf{e} := \begin{bmatrix} e_{-M} \\ \vdots \\ e_N \end{bmatrix}, \mathbf{v} := \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix}, \beta := \begin{bmatrix} \alpha_{-M-N} \\ \vdots \\ \alpha_{N-1} \end{bmatrix}, \tag{3.3.4}$$

y $\mathbf{T}(\beta)$ es una matriz de Toeplitz de dimensiones $(N + M + 1) \times N$ cuyos elementos son

$$[\mathbf{T}(\beta)]_{i,k} = \beta_{i-k+N} = \alpha_{i-k-M-1}, \quad i = 1, \dots, N + M + 1, \quad k = 1, \dots, N. \tag{3.3.5}$$

Por lo tanto, la matriz de covarianza de \mathbf{e} , la cual se denotará \mathbf{P} , se obtiene según (3.3.3) como

$$\text{cov}(\mathbf{e}) = \mathbf{P} = E\{\mathbf{T}(\beta)\mathbf{v}\mathbf{v}^T\mathbf{T}^T(\beta)\} = \mathbf{T}(\beta)E\{\mathbf{v}\mathbf{v}^T\}\mathbf{T}^T(\beta) = \sigma^2\mathbf{T}(\beta)\mathbf{T}^T(\beta). \tag{3.3.6}$$

Nótese que a partir de este resultado, se obtiene directamente [51] que:

$$\text{rank}\{\mathbf{P}\} = \text{rank}\{\mathbf{T}(\beta)\} \leq \min(N + M + 1, N) = N. \tag{3.3.7}$$

La primera igualdad proviene de la identidad $\text{rank}\{\mathbf{A}\mathbf{A}^T\} = \text{rank}\{\mathbf{A}\}$ [52]. Es posible obtener un resultado aún más preciso que (3.3.7), como se presenta en el siguiente teorema:

Teorema 3.3.1. *Supóngase que $N_U(z)$ no tiene raíces con módulo igual a 1. Entonces, el rango de \mathbf{P} es igual al mínimo entre N y el número de raíces estables de $N_U(z)$ más $M + 1$.*

Demostración. Ver [53]. □

En conclusión, para la configuración estudiada, el estimador de la respuesta a impulso dado por ETFE es asintóticamente no sesgado, y con matriz de covarianza directamente proporcional a la varianza del ruido blanco $\{v_t\}$.

También se observa que $\mathbf{P} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$, por lo que el estimador \hat{g}_t no es consistente. Es por esta razón que el estimador ETFE sin modificaciones no es muy utilizado. La inclusión de ventanas logra resolver este problema además de reducir la varianza de las estimaciones, a costa de aumentar el sesgo. El tratamiento de este estimador se discute en detalle en el Capítulo 6.

3.4. Conclusiones

Los resultados de este capítulo versan sobre la determinación explícita del estimador de la respuesta a impulso por ETFE para un modelo output error y la característica de ésta que la hace no causal para muchas señales de entrada. El resultado principal es que la causalidad o no causalidad del estimador depende de la expansión en serie de Laurent de la función racional $z^N(N_U(z))^{-1}$, la cual en general entrega coeficientes positivos y negativos, provocando no causalidad. Como se ha mencionado anteriormente, en identificación es común estimar sistemas causales. Por ende, los términos no causales para estos casos no deberían considerarse como información válida. Sin embargo, aún pueden contener información de utilidad dado que estas muestras están correlacionadas con las muestras causales. Esta información servirá en los capítulos posteriores para mejorar la estimación obtenida por este estimador.

Por otra parte, se determinó las propiedades estadísticas del estimador obtenido en media, covarianza, y matriz de covarianza. Los resultados obtenidos, además de precisar matemáticamente los alcances del estimador, son un pie de partida para mejorarlos.

ANÁLISIS DE CASOS Y EL PROBLEMA DE CAUSALIDAD DEL ESTIMADOR ETFE

4.1. Introducción

Este capítulo trata sobre la implementación y simulación del estimador ETFE obtenido explícitamente en el capítulo anterior, fijando el análisis en la no causalidad de éste. Basados en un sistema de segundo orden, las simulaciones obtenidas están orientadas a estudiar el estimador ETFE no bajo la DFT y FFT, que corresponden a las herramientas más típicas para el cálculo del estimador, sino que bajo la transformada de Fourier de tiempo discreto (DTFT). Con este análisis, se espera observar directamente los efectos no causales producidos por la secuencia de entrada. En esta línea, se estudia el conjunto de secuencias de entradas que provocan estimaciones causales y sus principales consecuencias en la aplicación del estimador ETFE, en conjunto con otras simulaciones de interés para aportar en el entendimiento del estimador, sus ventajas y alcances prácticos.

La herramienta de software usada en este capítulo es MATLAB. Para explicar algunas simulaciones se han obtenido algunos resultados teóricos, los cuales se mencionan como teoremas o lemas según corresponda.

4.2. Consideraciones sobre implementación y simulación

Para estudiar el estimador ETFE, se propondrá un ejemplo particular, y en base a éste se estudiarán algunas propiedades interesantes del estimador relacionado con su causalidad. Se propone estimar el sistema continuo de segundo orden

$$G_0(s) = \frac{0.01(s + 10)}{s^2 + 0.2s + 0.01}$$

el cual se discretiza con retenedor de orden cero y periodo de muestreo $T_s = 1[s]$ elegido de acuerdo al criterio usual relacionado con el tiempo de subida o *rise time* [44], obteniéndose el sistema discreto expresado en función del operador q como

$$G_0(q) = \frac{0.059511(q + 0.6623)}{q^2 - 1.97q + 0.9802}. \quad (4.2.1)$$

Se busca estimar la respuesta en frecuencia y la respuesta a impulso del sistema (4.2.1).

Usando el comando `lsim` de MATLAB, se obtienen N datos de salida y_t como respuesta frente a N datos de la entrada u_t . La salida se contamina con ruido blanco aditivo de media cero y varianza σ^2 dada en cada ejemplo, de modo de reproducir la estructura output error en (3.2.1). Para efectos de cálculo en MATLAB, se discretizan las DTFT de las señales de entrada y salida con un muestreo en frecuencia Δ_ω , para obtener el estimador ETFE como

$$\hat{G}(e^{j\Delta_\omega n}) = \frac{\sum_{k=1}^N y_k e^{-j\Delta_\omega nk}}{\sum_{k=1}^N u_k e^{-j\Delta_\omega nk}}, \quad n = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{2\pi}{\Delta_\omega} \right\rfloor - 1. \quad (4.2.2)$$

Así, se determina la estimación de la respuesta a impulso con la aproximación por suma de Riemann de la transformada inversa de Fourier [39]:

$$\hat{g}_t = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{G}(e^{j\omega}) e^{j\omega t} d\omega \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{n=0}^{\left\lfloor \frac{2\pi}{\Delta_\omega} \right\rfloor - 1} \hat{G}(e^{j\Delta_\omega n}) e^{j\Delta_\omega n t} \Delta_\omega. \quad (4.2.3)$$

Note que si se trabaja con $\Delta_\omega = \frac{2\pi}{N}$, las expresiones (4.2.2) y (4.2.3) corresponden a la transformada de Fourier discreta (DFT) y su transformada inversa respectivamente. Ésta es la forma estándar de trabajar computacionalmente con la EFTE, a partir de Fast Fourier Transform (FFT, [54]). Este desarrollo es un camino alternativo para deducir la DFT a partir de la DTFT de una función con un número finito de términos no nulos y haciendo la evaluación $\omega = \frac{2\pi k}{N}$, es decir, un barrido de N puntos sobre ω , que se considera entre 0 y 2π .

Cabe destacar que la FFT produce respuestas a impulso periódicas de periodo N . Por lo tanto, se debe tener cuidado al tratar no causalidades con DFT, dado que las muestras antes de tiempo cero simplemente corresponderán a las últimas muestras de la estimación de la respuesta a impulso por la N -periodicidad de las imágenes obtenidas bajo esta transformada. Visto de esta forma, todas las estimaciones con DFT son no causales. Ahora, bajo el enfoque propuesto y las transformadas estudiadas, \hat{g}_t será de periodo $\frac{2\pi}{\Delta_\omega}$. Se desea que Δ_ω sea lo más pequeño posible para trabajar con \hat{g}_t de periodo suficiente para al menos considerar todos los N datos de experimentación, más M datos anteriores a cero, para mostrar causalidad o no causalidad. Así se pretende aproximar de mejor forma la DTFT y su inversa.

Además, Δ_ω se decide con el objetivo de tener una mallado suficientemente fino para considerar despreciable el error en la suma de Riemann. Un error observable a primera vista, es que \hat{g}_t aproximado por el término de la derecha en (4.2.3) en general será un número complejo con parte imaginaria distinta de cero, pero pequeña en norma comparado con su parte real. Como resultado empírico, se considera que con $\Delta_\omega = \frac{2\pi}{10N}$ para la gran mayoría de las simulaciones estudiadas se tiene un error despreciable en la parte imaginaria y por ende, la suma de Riemann en (4.2.3) es una aproximación razonable.

4.3. Causalidad dependiente de la entrada

4.3.1. Primeras estimaciones causales y no causales

Con las consideraciones dadas y el esquema definido, en primer lugar se estudia la estimación por ETFE con una entrada ruido blanco.

Sea $\{u_t\}$ una secuencia de ruido blanco gaussiano de media cero y varianza 1. El ruido sumado a la salida corresponde a ruido blanco gaussiano de media cero y varianza $\sigma^2 = 0.05$, con tal de tener una relación señal a ruido de 5 %, lo cual corresponde a un valor típico para efectos de simulación. Para una realización con $N = 1000$ datos, cantidad suficiente para captar las dinámicas del sistema y razonable para efectos de experimentación, se obtienen los resultados en el dominio del tiempo y de la frecuencia, ambos presentados en la Figura 4.1.

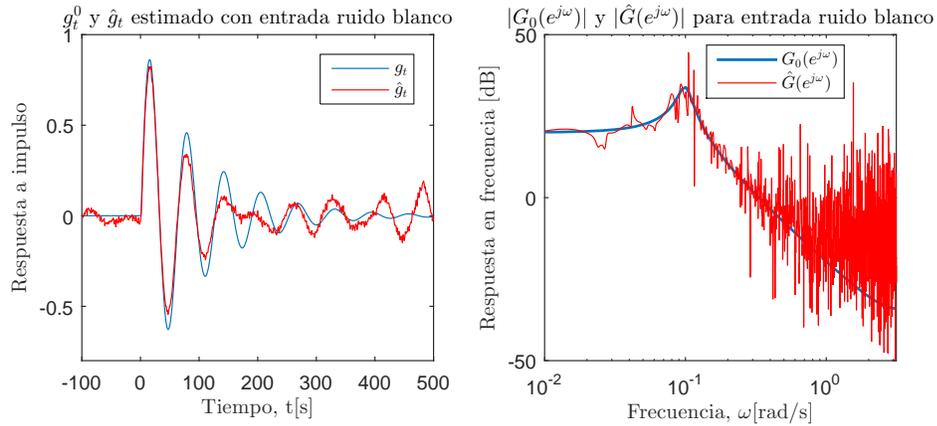


Figura 4.1: Izquierda: respuesta a impulso verdadera (azul), y la estimada por ETFE (rojo). Derecha: magnitud de la respuesta en frecuencia verdadera (azul), y la estimada por ETFE (rojo). Gráficos para señal de entrada ruido blanco y varianza de ruido $\sigma^2 = 0.05$.

Tal como se espera, el método ETFE entrega estimaciones aceptables en frecuencia y tiempo para la cantidad de datos usados, pudiendo distinguir las principales dinámicas del sistema. Sin embargo, en la respuesta a impulso de la Figura 4.1 es posible apreciar valores distintos de cero para $t < 0$ en la respuesta a impulso estimada por ETFE. Esto es natural, pues es altamente probable que la entrada u_t fuerce al menos un polo inestable en la expresión $z^N(N_U(z))^{-1}$, lo cual origina la no causalidad del estimador.

Ahora, para obtener un estimación causal de la respuesta a impulso, por (3.2.21), debe construirse una señal de entrada que tenga como polinomio $N_U(z)$ con todos sus ceros dentro del círculo unitario. Ciertamente ésta es una restricción no trivial. Para la construcción de una entrada particular con estas propiedades, se recurre al teorema de Eneström-Kakeya de variable compleja, el cual se enuncia a continuación:

Teorema 4.3.1. *Sea $N_U(z) = u_N + u_{N-1}z + u_{N-2}z^2 + \dots + u_1z^{N-1}$, donde $0 < u_N < u_{N-1} < \dots < u_1$. Entonces, $N_U(z)$ tiene todos sus ceros estrictamente dentro del círculo unitario.*

Demostración. Ver [55]. □

Entonces, se propone una secuencia de entrada que satisfaga esta condición. Se define la señal de entrada rampa decreciente pseudoaleatoria u_t como:

$$u_t = u_{t-1} - |e_t|, \quad u_N = 0.1, \quad (4.3.1)$$

donde $\{e_t\}$ es una secuencia de ruido blanco Gaussiano de media cero y varianza $\sigma_e^2 = 10^{-5}$. Una realización de esta entrada se presenta en la Figura 4.2.

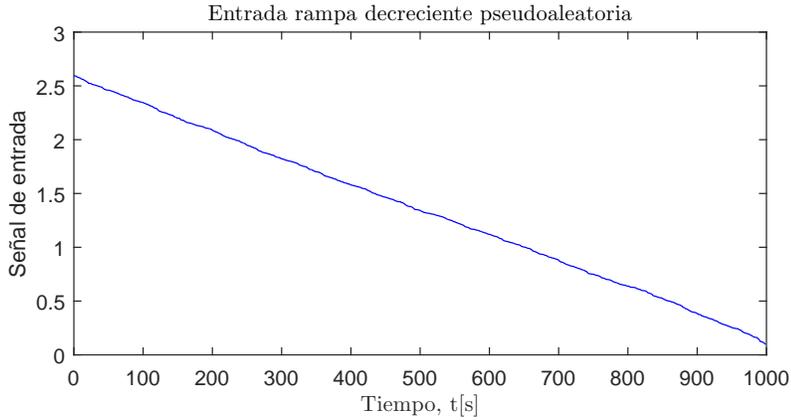


Figura 4.2: Entrada u_t rampa decreciente pseudoaleatoria, con $\sigma_e^2 = 10^{-5}$.

La elección de un u_t ruidoso se debe a que éste será ligeramente más rico en frecuencias en comparación a una rampa sin ruido, pues ésta puede verse como una rampa determinística decreciente, sumada con un ruido adecuado tal que $u_n < u_m$ para $n > m$. Por otra parte, la elección de la varianza de e_t es determinante para la magnitud inicial de la entrada construida, la cual se procura que no sea excesiva. Por supuesto, la problemática por mostrar no reside en este parámetro, sino que solamente se fija para la construcción de un ejemplo ilustrativo.

Para este caso, se experimentará con un ejemplo ruidoso, con tal de mostrar que sin importar la energía del ruido, el resultado de causalidad es claro. Se propone varianza de ruido en la salida $\sigma^2 = 0.15$. Se presentan los resultados en frecuencia y tiempo en la Figura 4.3.

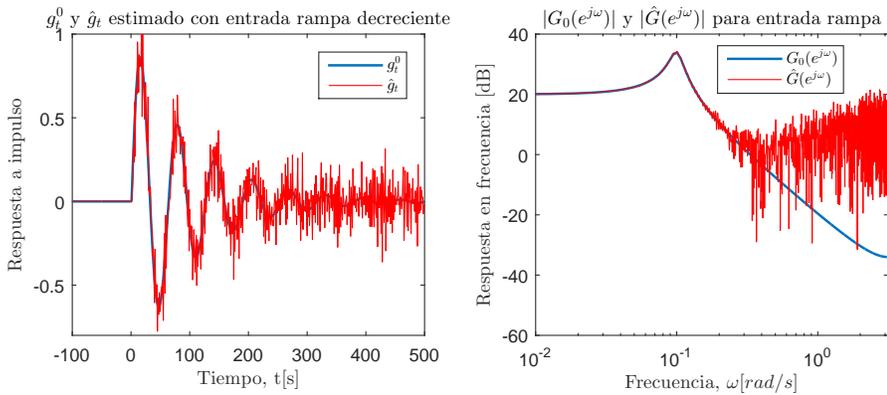


Figura 4.3: Izquierda: Respuesta a impulso verdadera (azul), y la estimada por ETFE (rojo). Derecha: Magnitud de la respuesta en frecuencia verdadera (azul), y la estimada por ETFE (rojo). Gráficos para señal de entrada rampa decreciente pseudoaleatoria y varianza de ruido $\sigma^2 = 0.15$.

Como se aprecia en la Figura 4.3, la respuesta estimada es causal. Esto está en plena concordancia con el resultado teórico obtenido en (3.2.21).

Es posible notar además, la dificultad evidente en la construcción de un ejemplo con estimador causal de respuesta a impulso. Por supuesto, la entrada producida no es de gran interés para identificación, pues es una señal no estacionaria y no acotada. Para estudiar más sobre condiciones necesarias y suficientes para construcción de entradas que producen estimaciones causales, se recomienda revisar [56, 57].

4.3.2. Estimaciones causales usando otra señal de entrada

El teorema de Eneström-Kekeya, enunciado en la Sección 4.3.1, establece una condición suficiente sobre la secuencia de entrada para que el polinomio $N_U(z)$ tenga todas sus raíces estrictamente dentro del círculo unitario. Sea $\{u_t\}$ una secuencia de entrada que provoca estimaciones causales. Usando estos mismos coeficientes de la secuencia de entrada, si se resuelve la ecuación

$$N_U(-z) = u_N - u_{N-1}z + u_{N-2}z^2 + \cdots + (-1)^{N-1}u_1z^{N-1} = 0, \quad (4.3.2)$$

se obtienen raíces $z = -p_i$, las cuales se encuentran dentro del círculo unitario, pues sólo se ha hecho un cambio de signo con respecto a las raíces del polinomio $N_U(z)$. Así, es posible formar una secuencia de entrada, la cual se llamará rampa alternada, dada por la restricción

$$0 < u_N < -u_{N-1} < u_{N-2} < \cdots < (-1)^{N-1}u_1, \quad (4.3.3)$$

la cual satisface la condición suficiente para causalidad del estimador ETFE. Un ejemplo de una señal de entrada con estas características se escribe recursivamente de esta forma:

$$u_t = (-1)^{N-t}(u_{t-1} - |e_t|) \quad , \quad u_N = 0.1, \quad (4.3.4)$$

donde e_t es ruido blanco de media cero.

A continuación se verá un ejemplo de una estimación producida por la señal de entrada descrita en (4.3.4). Se considera el sistema (3.2.1), donde $G_0(q)$ está dado por (4.2.1). Ocupando $N = 1000$ datos de entrada y salida, con $M = 100$ datos anteriores a cero, se obtiene la estimación de la respuesta a impulso para la señal de entrada rampa pseudoaleatoria u_t , y para la señal de entrada rampa alternada generada por la envolvente de u_t , dada explícitamente por $\bar{u}_t := (-1)^{N-t}u_t$. Considerando varianza del ruido $\sigma^2 = 0.1$, con la misma realización de ruido para ambos experimentos, se grafican los resultados¹ en la Figura 4.4. Como se observa en la Figura 4.4, la estimación obtenida para ambas señales de entrada es causal, lo cual concuerda con los resultados anteriormente desarrollados.

Interesantemente, la transformada de Fourier de la señal \bar{u}_t , denominada $U_2(e^{j\omega})$, es fácil de describir en términos de la transformada de Fourier de la rampa decreciente, denotada como $U_1(e^{j\omega})$:

$$U_2(e^{j\omega}) = \sum_{t=1}^N u_t (-1)^{N-t} e^{-j\omega t} \quad (4.3.5)$$

¹El lector podrá notar que en este caso, como algunos más en este trabajo, se ha preferido la notación $g(t)$ por sobre g_t . Ambas son equivalentes, y se ocupan según la comodidad, privilegiando expresar con precisión cada elemento presentado.

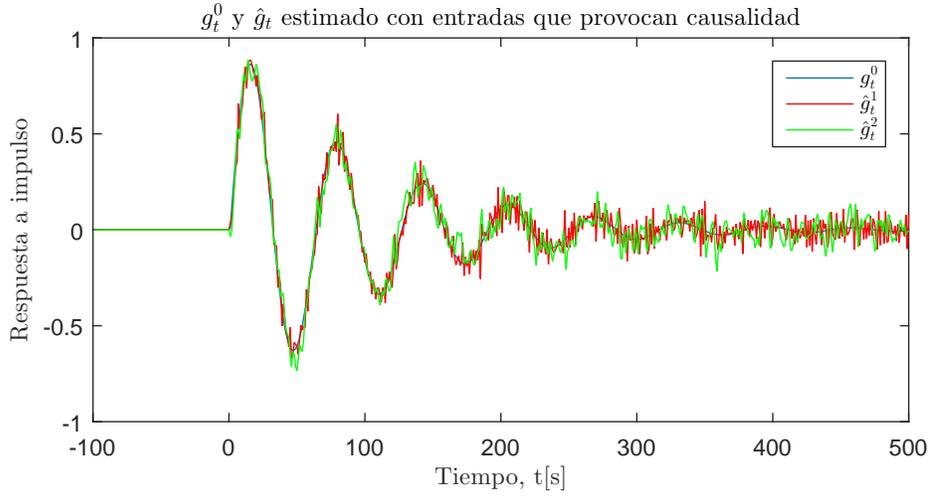


Figura 4.4: Respuesta a impulso verdadera (azul), la estimada por ETFE usando u_t (rojo, denotada por \hat{g}_t^1), y usando \bar{u}_t (verde, denotada por \hat{g}_t^2), otra señal que también provoca estimaciones causales.

$$= e^{j\pi N} \sum_{t=1}^N u_t e^{-j(\omega+\pi)t} \tag{4.3.6}$$

$$= e^{j\pi N} U_1(e^{j(\omega+\pi)}). \tag{4.3.7}$$

Así, $|U_2(e^{j\omega})| = |U_1(e^{j(\omega+\pi)})|$, como se comprueba en la Figura 4.5. Entonces, es claro que la señal

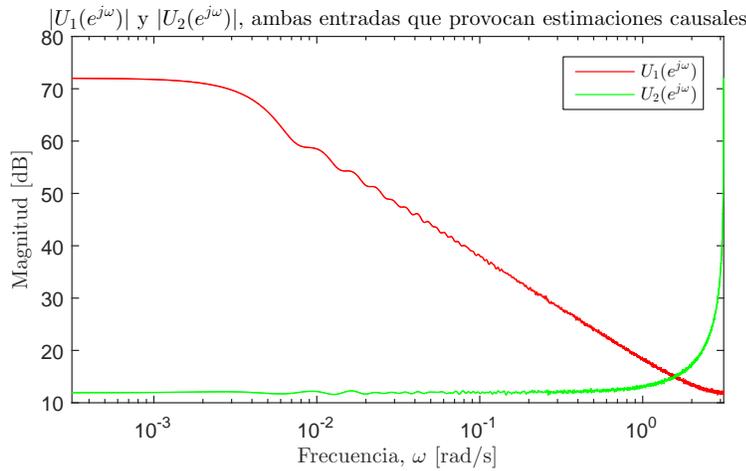


Figura 4.5: Magnitud de la transformada de Fourier de la rampa decreciente $|U_1(e^{j\omega})|$ (rojo), y de la señal rampa alternada $|U_2(e^{j\omega})|$ (verde).

rampa alternada \bar{u}_t será de mayor utilidad si se necesita obtener precisión en la estimación en altas frecuencias, al contrario de la señal rampa decreciente u_t , la cual tiene alta energía en baja frecuencia.

Esto intuitivamente tiene sentido, pues la secuencia \bar{u}_t es altamente cambiante, al contrario de la señal de rampa decreciente u_t . Es posible notar la precisión obtenida por rangos de frecuencia en la estimación de la magnitud de la respuesta en frecuencia, la cual se observa en la Figura 4.6.

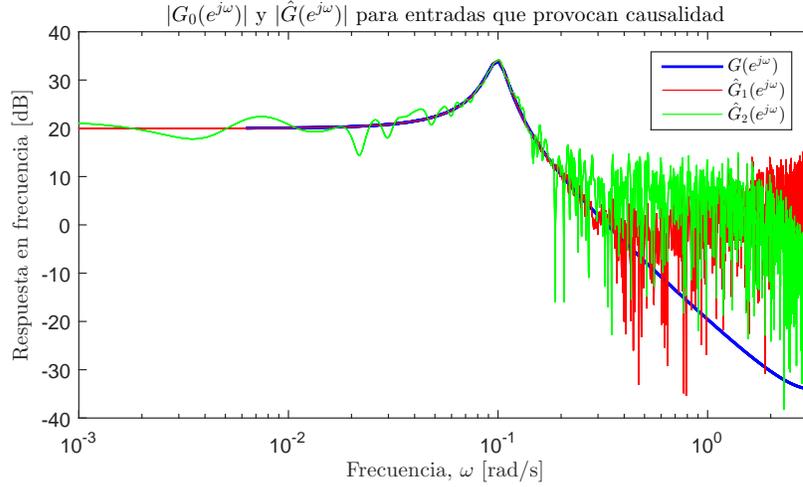


Figura 4.6: Respuesta en frecuencia verdadera (azul), la estimada por ETFE usando u_t (rojo, denotada por \hat{G}_1), y usando \bar{u}_t (verde, denotada por \hat{G}_2).

Tal como se predijo, la estimación en verde, correspondiente a la obtenida por la señal de entrada rampa alternada, es más precisa en altas frecuencias, es decir, en la cercanía de $\omega = \pi$.

4.4. Variación de parámetros de simulación e interpretaciones

Para entender más a profundidad el estimador estudiado, y sus características frente a señales que provocan causalidad, a continuación se estudian algunos casos particulares y variaciones.

A. Robustez de Δ_ω y N

Para el estimador ETFE estudiado, el análisis es idéntico a la ETFE tradicional en cuanto a la cantidad de datos N . Por otra parte, Δ_ω es de gran importancia, pues determina la periodicidad de \hat{g}_t , y el nivel de precisión de la aproximación por suma de Riemann de la transformada inversa de Fourier en (4.2.3).

Como se mencionó anteriormente, para $\Delta_\omega = \frac{2\pi}{N}$ se obtiene el estimador clásico por DFT, el cual será no causal por la repetición de la secuencia \hat{g}_t estimada con periodo N . Para probar el efecto de valores de Δ_ω más pequeños (los cuales serán de utilidad), se propone un experimento con entrada rampa decreciente con tal de observar directamente el error en la parte no causal en función de Δ_ω . Realizando la prueba con distintos órdenes de magnitud $\Delta_\omega = \frac{2\pi}{kN}$, $k \in \{1, 2, 4\}$ con $N = 700$, se obtienen los resultados ilustrados en la Figura 4.7.

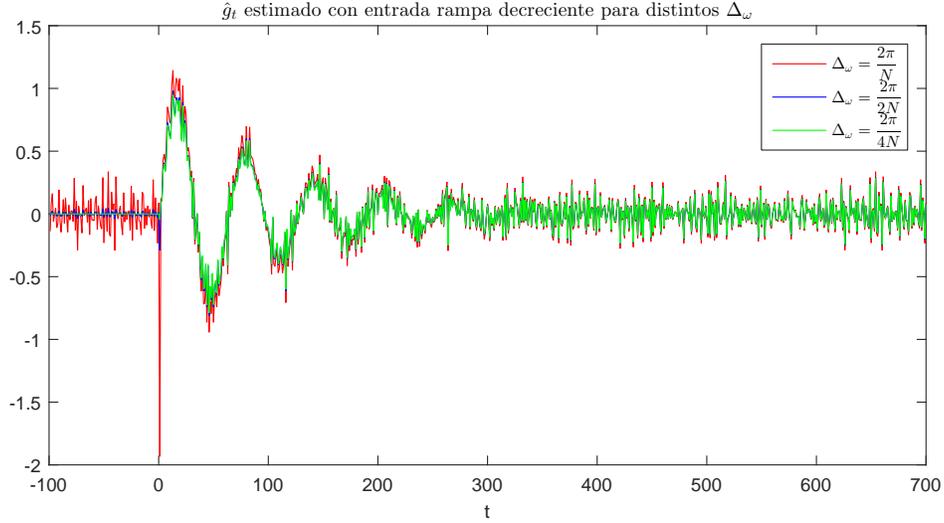


Figura 4.7: Respuestas a impulso estimadas para $\Delta_\omega = \frac{2\pi}{N}$ (rojo), $\Delta_\omega = \frac{2\pi}{2N}$ (azul) y $\Delta_\omega = \frac{2\pi}{4N}$ (verde).

Es posible notar que a medida que se reduce Δ_ω , ciertamente se reduce la energía asociada a la parte no causal de la estimación. Tal como se había anticipado, la señal en rojo, correspondiente a $\Delta_\omega = \frac{2\pi}{N}$, repite sus valores en los tramos discretos $[-100, 0]$ y $[600, 700]$. Esto se produce porque la ETFE para este caso produce una respuesta a impulso estimada de período $N = 700$.

Razonando con la experimentación hecha, se estima empíricamente que con valores de Δ_ω menores o iguales a $\frac{2\pi}{10N}$, se obtiene un mallado suficientemente fino para trabajar la ETFE sin grandes errores de aproximación. De hecho, al probar esta misma configuración con $\Delta_\omega = \frac{2\pi}{10N}$ y comparar los resultados con $\Delta_\omega = \frac{2\pi}{100N}$, se obtiene un error total (entendiéndose éste como la norma-2 de la diferencia de las respuestas a impulso), menor a 10^{-7} .

B. Señal de entrada escalón

La señal escalón es una señal pobre en frecuencias. Se puede observar en la Figura 4.8 que el método ETFE tradicional no entrega resultados aceptables, esto dado que la DTFT de la señal de entrada es prácticamente cero para toda frecuencia, salvo aquéllas cercanas a la frecuencia 0 (2π). Lo anterior provoca que las frecuencias distintas de cero de la salida no puedan ser estimadas con precisión y por ende, la estimación de la respuesta a impulso por ETFE no será precisa. En cuanto a la causalidad, el recíproco de la DTFT del escalón, haciendo $e^{j\omega} = z$, se puede expresar como

$$\frac{1}{U(e^{j\omega})} \Big|_{e^{j\omega}=z} = \frac{z^N}{N_U(z)} = \frac{z^N}{\sum_{k=0}^{N-1} z^k} = \frac{z^N(z-1)}{z^N-1}$$

Es decir, el polinomio $N_U(z)$ contiene todos sus ceros en la circunferencia unitaria $|z| = 1$. Por ende, como se mostró en la sección anterior, la estimación con ETFE no entrega resultados causales. La estimación claramente no es válida y carece de sentido práctico. Esto se observa en el hecho que el orden de magnitud de los datos estimados es totalmente incorrecto, lo cual implica una probable

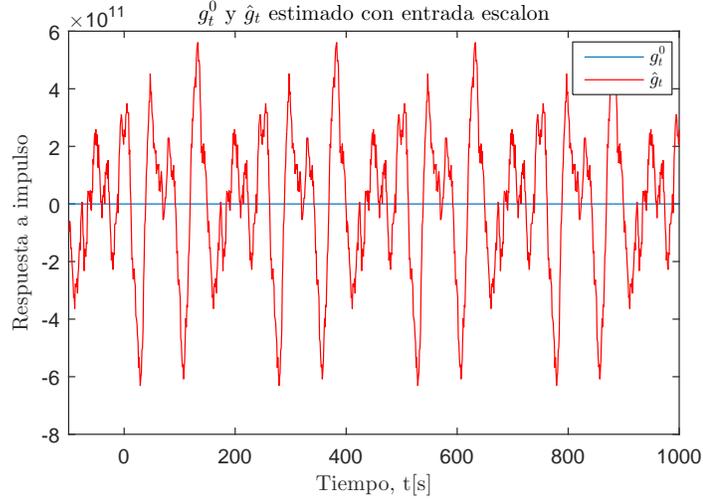


Figura 4.8: Respuesta a impulso verdadera (azul), y la estimada por ETFE (rojo) para entrada escalón unitario.

indeterminación. La interpretación y análisis de este resultado se encuentra en el próximo punto. Con este resultado, la interrogante natural es entender qué sucede con el estimador ETFE cuando se excita al sistema por identificar con una señal de entrada periódica.

C. Estimaciones causales a partir de señales periódicas

En esta subsección se estudiará si es posible obtener estimaciones causales a partir de señales periódicas.

Observemos los ceros de $N_U(z)$ para secuencias de entrada que satisfagan $u_t = u_{t+T}$ para todo t , donde $T \in \mathbb{Z}$ es el período de u_t . Se supondrá que la cantidad de datos N es múltiplo del período T . Note que

$$\begin{aligned}
 U_N(z) &= \sum_{k=1}^N u_k z^{-k} = \sum_{k=1}^T u_k z^{-k} + \sum_{k=T+1}^{2T} u_k z^{-k} + \cdots + \sum_{k=N-T+1}^N u_k z^{-k} \\
 &= \sum_{k=1}^T u_k z^{-k} (1 + z^{-T} + \cdots + z^{-(N-T)}) \\
 &= \sum_{k=1}^T u_k z^{-k} \sum_{l=0}^{\frac{N}{T}-1} z^{-lT} \\
 &= \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-T}} \sum_{k=1}^T u_k z^{-k}.
 \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

Así, $z^N (N_U(z))^{-1}$ se puede expresar como

$$\frac{1}{U_N(z)} = \frac{z^N}{N_U(z)} = \frac{z^N (z^T - 1)}{(z^N - 1) \sum_{k=1}^T u_k z^{T-k}},$$

de donde se deduce que $N_U(z)$ tendrá ceros en la circunferencia unitaria y por lo tanto, la estimación será no causal.

A continuación se presenta la observación anterior en un ejemplo. Se considera un diente de sierra decreciente, de 4 períodos ($T = 250$) con $N = 1000$. La estimación por ETFE considerando los 1000 datos de entrada y salida se ilustra en la Figura 4.9.

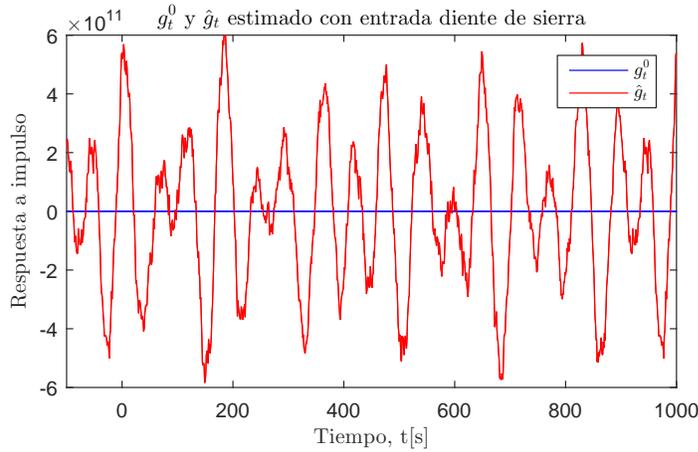


Figura 4.9: Respuesta a impulso verdadera (azul), y la estimada por ETFE (rojo) para entrada diente de sierra de 4 períodos.

Por supuesto, la estimación obtenida no es causal, en concordancia con el análisis hecho para señales periódicas. Cabe destacar que no hay resultados aceptables en la estimación producto de la periodicidad. De hecho, la estimación es totalmente errada en cuanto a que se encuentra varios órdenes de magnitud mayor que la respuesta a impulso verdadera. Se estudia a continuación entonces, qué provoca que se tengan tan malas estimaciones para señales periódicas.

Analicemos las transformadas de Fourier de un período de la secuencia de entrada, versus la transformada de la secuencia completa.

Sea la transformada de Fourier de sólo un período de una secuencia periódica de entrada u_t de período T

$$U_T(e^{j\omega}) = \sum_{k=1}^N u_k e^{-j\omega k}. \tag{4.4.2}$$

La transformada de Fourier de la secuencia completa de largo N está dada por (4.4.1) y se puede expresar como

$$U_N(e^{j\omega}) = \frac{1 - e^{-j\omega N}}{1 - e^{-j\omega T}} \sum_{k=1}^T u_k e^{-j\omega k} = e^{-\frac{j\omega}{2}(N-T)} \frac{\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)} U_T(e^{j\omega}). \tag{4.4.3}$$

Es decir, la magnitud de la transformada de Fourier de la secuencia completa es equivalente a la magnitud de la transformada de un período modulada por $\left| \sin\left(\frac{\omega N}{2}\right) \left(\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right)^{-1} \right|$, lo cual introduce ceros en el espectro, tal como se ve en la gráfica en escala lineal de la Figura 4.10. Nótese que

se ha decidido graficar en escala lineal para mostrar de manera más clara el efecto del envolvente $\left| \sin\left(\frac{\omega N}{2}\right) \left(\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)\right)^{-1} \right|$.

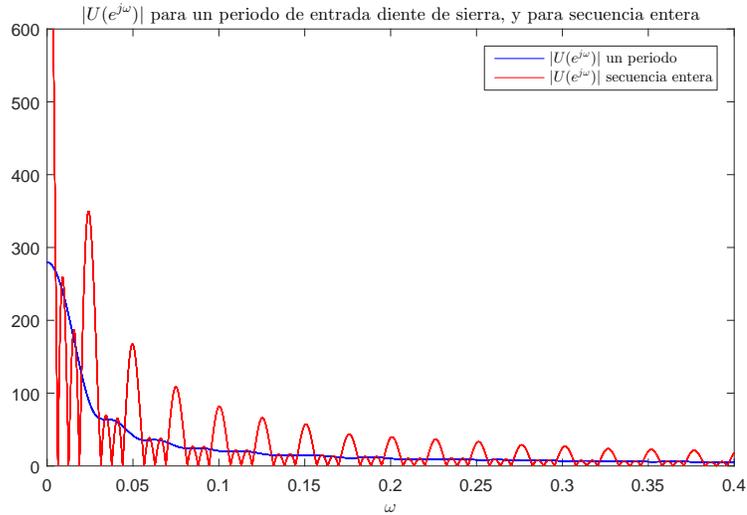


Figura 4.10: Magnitud del espectro de la señal de entrada para un período (azul), y para la secuencia entera (rojo).

Por supuesto, $|U_N(e^{j\omega})|$ es acotado para todo ω dado que N es múltiplo entero del período T , lo cual hace cancelar todos los ceros de $\sin\left(\frac{\omega T}{2}\right)$ con ceros en la expresión $\sin\left(\frac{\omega N}{2}\right)$.

Dado que la ETFE se obtiene como una división frecuencia a frecuencia de la transformadas de Fourier de salida y entrada, la ETFE se indetermina para las frecuencias donde $U_N(e^{j\omega}) = 0$. Para estas frecuencias, idealmente se tendría $Y_N(e^{j\omega}) = 0$. Sin embargo, esto no se cumple debido a que la señal y_t , pese a provenir de una entrada periódica, no es periódica producto del ruido de medición v_t , el cual es un proceso estocástico. Por ende, si se determina la ETFE sin esta consideración, se obtienen peaks de frecuencia producto de la división por cero, como se observa en la Figura 4.11.

Entonces, una posible opción para resolver este problema es modificar el cálculo de la ETFE, forzando a que cuando $U_N(e^{j\omega_0}) = 0$ para cierto ω_0 , se imponga $\hat{G}(e^{j\omega_0}) = 0$. Esta ETFE modificada se denotará $\hat{\hat{G}}(e^{j\omega})$. Nótese que esta imposición al valor cero es arbitraria, y perfectamente podría imponerse otro valor, dado que realmente no se conoce cuánto vale $\hat{G}(e^{j\omega_0})$. Podrían también tratarse estos valores como outliers y reemplazarlos por valores cercanos a la respuesta en frecuencia de frecuencias adyacentes. Sin embargo, sólo para ilustrar la idea, se fuerzan a cero estos valores en este ejemplo.

Con esta modificación básica descrita, se obtiene el espectro de magnitud de $|\hat{\hat{G}}(e^{j\omega})|$ ilustrado en la Figura 4.12.

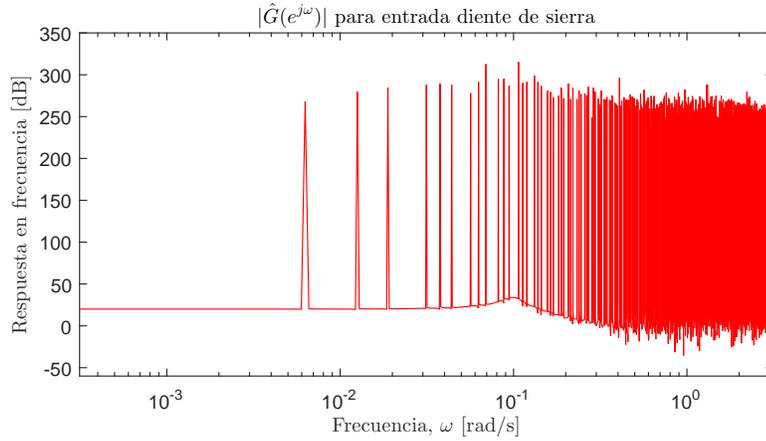


Figura 4.11: Magnitud de la respuesta en frecuencia $\hat{G}(e^{j\omega})$ estimada por ETFE con entrada periódica.

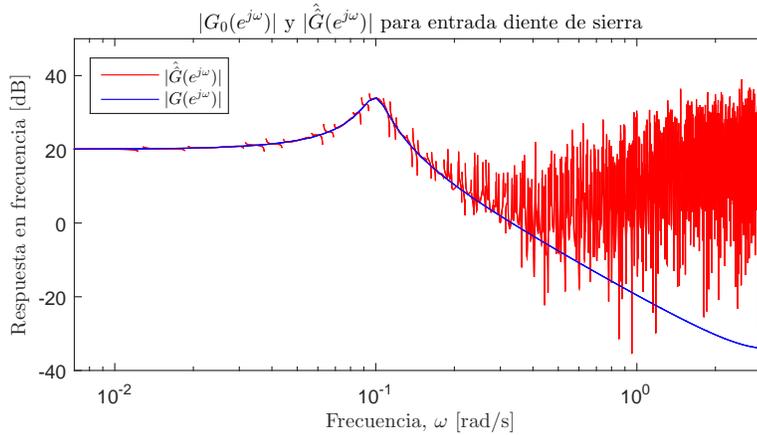


Figura 4.12: Magnitud de $G(e^{j\omega})$ (azul) y la magnitud estimada por ETFE modificado (rojo), con entrada periódica.

Con la ETFE modificada $\hat{G}(e^{j\omega})$ se obtiene la respuesta a impulso estimada en la Figura 4.13.

Claramente el resultado obtenido en la Figura 4.13 es más satisfactorio que el de la Figura 4.9. En resumen, es posible trabajar la ETFE con señales periódicas, pero su tratamiento no es recomendable debido a las indeterminaciones en el cálculo de la ETFE como cociente de transformadas de Fourier.

Para resolver la transformada y la transformada inversa aproximada de la DTFT en las simulaciones, se ha muestreado en frecuencia con Δ_ω , el cual en este caso se ha fijado en $\Delta_\omega = \frac{2\pi}{20N}$. Esto es importante, pues el paso escogido permite distinguir exactamente los ceros en frecuencia dado que

$$\sin\left(\frac{\omega_1 N}{2}\right) = 0 \implies \omega_1 = \frac{2k\pi}{N}, \quad (4.4.4)$$

con lo cual $\omega_1 = m\Delta_\omega$, para cierto m entero. Entonces, también puede postularse elegir un Δ_ω tal que

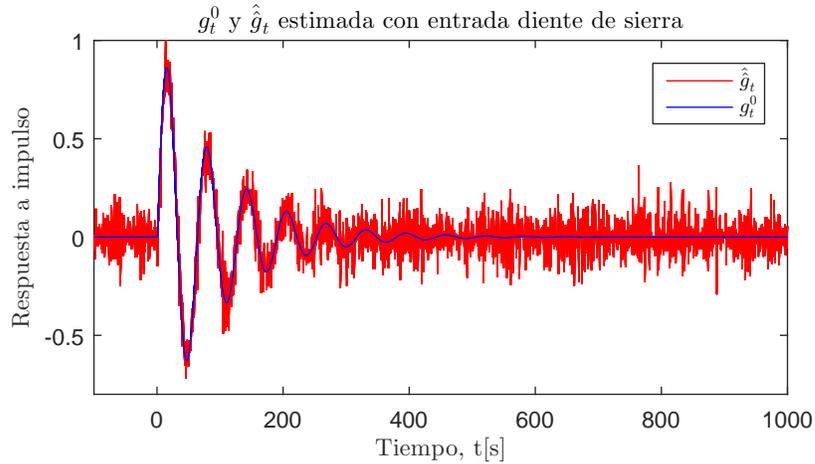


Figura 4.13: Respuesta a impulso verdadera (azul), y la estimada por ETFE modificada (rojo).

no se satisfaga esta relación. Sin embargo, pese a que no se obtienen ceros absolutos en $U_N(e^{j\omega})$, aún permanecen los problemas numéricos asociados al haber un compromiso entre una malla fina para el cálculo preciso de las transformadas, y la cercanía a los ceros de $U_N(e^{j\omega})$.

D. Promediado de ETFE

Un método alternativo para mejorar las estimaciones por análisis espectral es promediando periodogramas o en este caso, promediando estimaciones obtenidas por ETFE. A continuación se estudiará el comportamiento del estimador ETFE si para una señal de entrada rampa decreciente periódica de 4 períodos se dividen en 4 partes los datos generados y se promedian las estimaciones.

Se hace el experimento con $\sigma_e^2 = 10^{-4}$, y bajo un ruido $\sigma^2 = 0.4$, de la misma varianza que el primer caso causal. Los resultados se muestran en la Figura 4.14.

Como se muestra en la figura, la estimación es causal. Esto era predecible, pues el promediado se hizo con 4 sub-secuencias de entrada que satisfacen la propiedad relacionada con $N_U(z)$. Es claro que el resultado es mejor que considerar la ETFE de la secuencia entera, por lo visto en el punto anterior. Nótese que la transformada inversa de Fourier utilizada permite obtener valores anteriores y posteriores a las primeras T muestras, con lo cual se pueden tener estimaciones básicas de los valores posteriores a la muestra 250. Esto ciertamente no es posible usando la ETFE estándar con FFT.

Una característica interesante del gráfico de la Figura 4.14 es que se aprecia con claridad que la magnitud del error entre la estimación y la respuesta verdadera disminuye a partir de $t = 250$. A continuación analizaremos dicho efecto.

La estimación de la respuesta a impulso por ETFE está dada por (3.2.21). La disminución del error observado tiene directa relación con el término $\Delta g_t := \sum_{k=1}^N (m_k + v_k)\alpha_{t-k}$, es decir del ruido, de la secuencia de entrada, y la respuesta a impulso verdadera. Dado que el ruido es blanco, es poco probable que el cambio brusco del error de la Figura 4.14 se deba a una cierta realización de ruido,

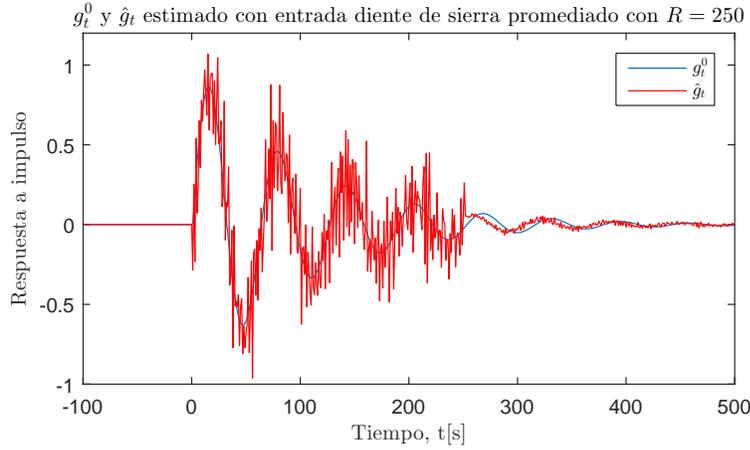


Figura 4.14: Respuesta a impulso verdadera (azul), y la estimada por ETFE promediada con cuatro partes, con señal de entrada diente de sierra decreciente (rojo).

y la respuesta a impulso verdadera ciertamente no presenta indicios que permitan concluir que el cambio repentino se debe únicamente a ésta.

Para simplificar el análisis, se estudia la señal de entrada simplificada. Considérese una rampa decreciente determinística dada por

$$u_t = t \left(\frac{u_{\min} - u_{\max}}{R - 1} \right) + \frac{Ru_{\max} - u_{\min}}{R - 1}, \quad (4.4.5)$$

es decir, una rampa decreciente de largo R que satisface $u_1 = u_{\max}$ y $u_R = u_{\min}$, con $u_{\min} > 0$. Observando la Figura 4.2, esta aproximación es razonable.

El polinomio de interés $z^R(U_R(z))^{-1}$ se puede expresar como

$$\begin{aligned} \frac{z^R}{U_R(z)} &= \frac{z^R}{\sum_{t=1}^R \left(t \left(\frac{u_{\min} - u_{\max}}{R - 1} \right) + \frac{Ru_{\max} - u_{\min}}{R - 1} \right) z^{R-t}} \\ &= \frac{z^R}{\frac{Ru_{\max} - u_{\min}}{R - 1} \left(\frac{z^R - 1}{z - 1} \right) + \frac{u_{\min} - u_{\max}}{R - 1} \left(\frac{z^{R+1} - (R+1)z + R}{(z-1)^2} \right)} \\ &= \frac{z^R (z - 1)^2 (R - 1)}{(R - 1)u_{\max}z^{R+1} + (u_{\min} - Ru_{\max})z^R + (u_{\max} - Ru_{\min})z + u_{\min}(R - 1)}. \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

Recuérdese que $U_R(z)$ satisface las condiciones pedidas del teorema de Eneström-Kakeya, por ende tiene todos sus ceros estrictamente dentro del círculo unitario. Esto implica que $z^R(U_R(z))^{-1}$ tiene región de convergencia $|z| > |c_{\max}|$, donde c_{\max} es el cero de mayor magnitud de $U_R(z)$. Como $|c_{\max}| < 1$, la región de convergencia de $z^R(U_R(z))^{-1}$ contiene a la circunferencia unitaria, y admite una descomposición en potencias negativas de z en esta región. Entonces, de (4.4.6) es posible obtener la serie de Laurent de forma directa a partir de división polinomial.

Para conocer el comportamiento de la secuencia $\{\alpha_k\}$, se plantea un ejemplo característico. Consideremos $R = 250$, $u_{\min} = 0.1$ y $u_{\max} = 3.49$. La gráfica de los coeficientes α_k , que corresponden a los coeficientes de la serie de Laurent de $z^R(U_R(z))^{-1}$ se observa en la Figura 4.15.

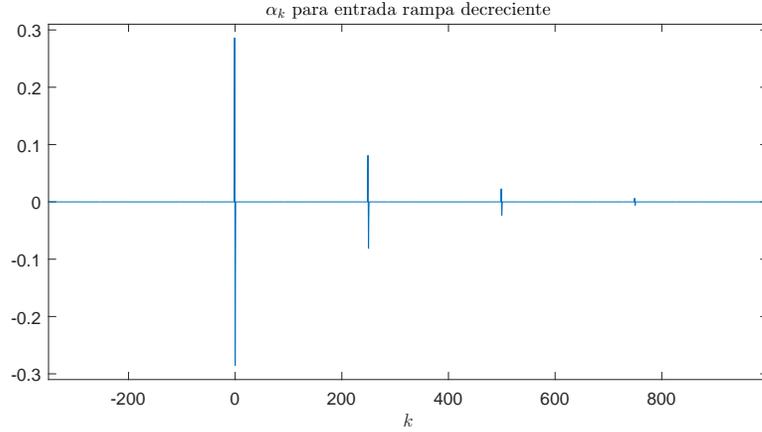


Figura 4.15: Coeficientes $\{\alpha_k\}$ de la serie de Laurent de $z^R(U_R(z))^{-1}$.

Los coeficientes α_k de la serie de Laurent $z^R(U_R(z))^{-1}$ son muy cercanos a cero para todo k , salvo $k = -1, 0, 249, 250, 499, 500, \dots$. Entonces, se puede aproximar la secuencia α_k como

$$\alpha_k \approx \alpha_{-1}\delta_{k+1} + \alpha_0\delta_k + \alpha_{249}\delta_{k-249} + \alpha_{250}\delta_{k-250} + \alpha_{499}\delta_{k-499} + \alpha_{500}\delta_{k-500} + \dots, \quad (4.4.7)$$

donde δ_{k-t} es el delta de Kronecker en $k = t$, y donde $|\alpha_{-1}| \approx |\alpha_0| > |\alpha_{249}| \approx |\alpha_{250}| > |\alpha_{499}| \approx |\alpha_{500}|$. Con esta información, a continuación se calculan algunos valores aproximados de Δg_t :

- Para $t = 1, \dots, 249$:

$$\begin{aligned} \Delta g_t &\approx \sum_{k=1}^{250} (m_k + v_k)(\alpha_{-1}\delta_{t-k+1} + \alpha_0\delta_{t-k}) \\ &\approx \alpha_{-1}(m_{t+1} + v_{t+1}) + \alpha_0(m_t + v_t). \end{aligned}$$

- Para $t = 250$:

$$\begin{aligned} \Delta g_{250} &\approx \sum_{k=1}^{250} (m_k + v_k)(\alpha_0\delta_{250-k} + \alpha_{249}\delta_{1-k}) \\ &\approx \alpha_0(m_{250} + v_{250}) + \alpha_{249}(m_1 + v_1). \end{aligned}$$

- Para $t = 250, \dots, 499$:

$$\begin{aligned} \Delta g_t &\approx \sum_{k=1}^{250} (m_k + v_k)(\alpha_{249}\delta_{t-k-249} + \alpha_{250}\delta_{t-k-250}) \\ &\approx \alpha_{249}(m_{t-249} + v_{t-249}) + \alpha_{250}(m_{t-250} + v_{t-250}). \end{aligned}$$

Como $|\alpha_{499}|$ y $|\alpha_{500}|$ son bastante más pequeños que $|\alpha_{-1}|$ y $|\alpha_0|$, se deduce que Δg_t disminuye bruscamente en $t = 250$, y en general, en Rm , con m positivo, y R la cantidad de datos de la división (que

en este caso corresponden a $R = 250$). En los tiempos entre quiebres, la magnitud de Δg_t no cambia significativamente.

La disminución escalonada del error se puede apreciar claramente con una división más grande de la cantidad de datos. Si se dividen en 5 partes los datos generados con $N = 1000$, $\sigma_e = 10^{-4}$, $\sigma = 0.4$, se obtiene la estimación de la respuesta a impulso graficada en la Figura 4.16.

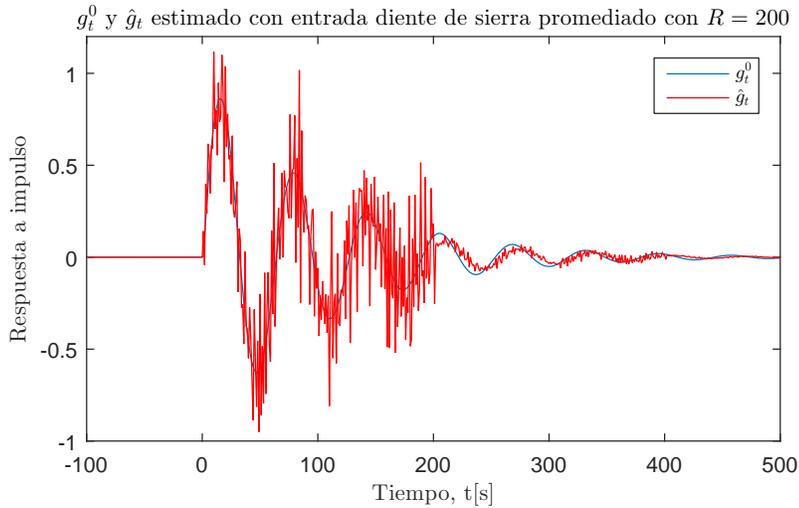


Figura 4.16: Respuesta a impulso verdadera (azul), y la estimada por ETFE promediada con $R = 200$ (rojo).

Es posible distinguir con claridad la disminución escalonada del error en los instantes $t = 200$ y $t = 400$, que corresponden a $t = R$ y $t = 2R$ respectivamente. Más aún, dado que $\alpha_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, la estimación converge al valor verdadero de la respuesta a impulso g_0^t para valores de t grandes aun cuando el estimador es sesgado para N finito.

Lamentablemente, dado que el ruido blanco no genera secuencias $\{\alpha_k\}$ concentradas en coeficientes específicos, el efecto anterior no se aprecia para este tipo de señal de entrada. Para señal de entrada ruido blanco de varianza 1, y $R = 250$, es decir, división de datos en 4 partes, se obtiene la ETFE promediada ilustrada en la Figura 4.17.

4.5. Conclusiones

En este capítulo se ha discutido la implementación del estimador ETFE. Se debe tener especial cuidado en estudiar el estimador analizado con DTFT dado que el tratamiento hecho es distinto al tradicional, el cual considera el cociente de transformadas de Fourier discretas (DFT), que es resuelto comúnmente con FFT. Esta diferencia es notoria, pues sólo bajo este esquema se puede apreciar con claridad que el estimador ETFE no es causal y por lo tanto, puede ser mejorado al forzar estimaciones causales para sistemas causales.

Además, se ha puesto particular énfasis a la robustez de la implementación, la simulación con entradas que producen estimaciones causales, y la ETFE promediada, la cual es de aplicación común

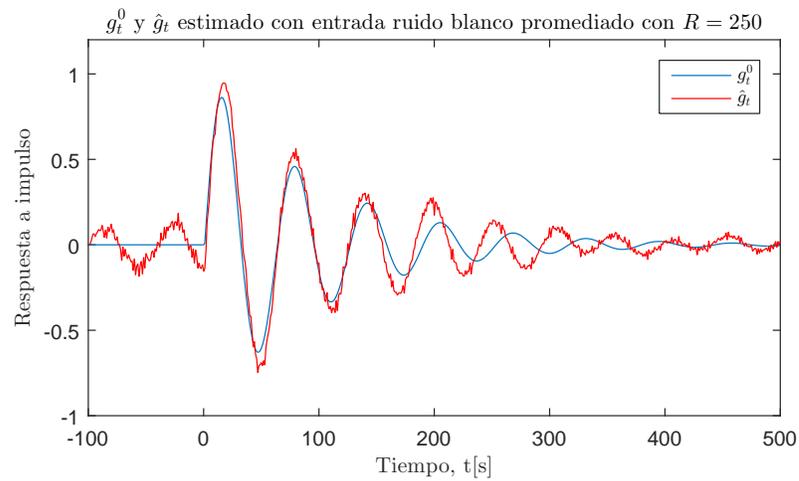


Figura 4.17: Respuesta a impulso verdadera (azul), y la estimada por ETFE promediada con entrada ruido blanco y $R = 250$ (rojo).

como técnica para reducir varianza [4], similar a un proceso de eventanamiento.

Los resultados en este capítulo sirven para obtener una intuición sobre un estimador de esta naturaleza. Las simulaciones hechas son un interesante aporte en entendimiento para contribuir a la formulación del estimador ETFE causal, el cual se deriva y demuestra estadísticamente en el siguiente capítulo.

ETFE CAUSAL, MODELO OE

5.1. Introducción

En este capítulo se aborda el problema de determinar un estimador mejorado del método no paramétrico ETFE que entregue estimaciones causales bajo la estructura output error (OE). Para esto, se explica brevemente la técnica a ocupar a través de un ejemplo general, para luego aplicarla al problema de estimación en cuestión.

La estrategia ocupada en este capítulo se considera novedosa para el estado del arte en esta materia. Se plantean dos formas de lograr un estimador causal. La primera consiste solamente en un truncamiento de la respuesta a impulso estimada, mientras que la segunda toma en consideración aquella información no causal para mejorar la varianza de los datos causales. Se discute a continuación la formulación, las propiedades del nuevo estimador causal en media y matriz de covarianza, las mejoras con respecto al método tradicional, y se hace un análisis con respecto al parámetro M , que corresponde a la cantidad de datos no causales fijados por el usuario. Finalmente, se concluye con simulaciones numéricas ilustrando las principales ideas de este capítulo.

Para la comprensión de este capítulo, resulta necesario el estudio de la deducción del estimador ETFE en el dominio del tiempo dado en el Capítulo 3, y los tópicos cubiertos por el Apéndice A.4 (sección matrices semidefinidas positivas y factorización de Cholesky), herramientas fundamentales para entender los resultados siguientes.

5.2. En busca de un mejor estimador

Si la respuesta a impulso verdadera \mathbf{g}^0 es causal, pero el estimador $\hat{\mathbf{g}}$ no lo es, es de interés estimar \mathbf{g}^0 por una señal causal $\hat{\mathbf{g}}_c$. Para hacer eso, se seguirá el siguiente razonamiento, expresado en un ejemplo de la técnica a ocupar:

Sea $\hat{\mathbf{X}} = [\hat{x}_1 \quad \hat{x}_2]^T$ una variable aleatoria de dimensión 2 con media $\boldsymbol{\mu} = [0 \quad \mu_2]^T$ y matriz de covarianza $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}$ definida positiva. El objetivo es estimar \hat{x}_2 , sabiendo que $\hat{x}_1 = 0$. Una opción es considerar el estimador

$$\tilde{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{X}}, \quad (5.2.1)$$

el cual distribuye como $\hat{\mathbf{X}}$, con igual media que $\hat{\mathbf{X}}$ pero matriz de covarianza $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_{22} \end{bmatrix}$.

Este estimador no considera la correlación que existe (o puede existir) entre \hat{x}_1 y \hat{x}_2 . Es razonable pensar que si no existe correlación entre estas variables (es decir, $P_{12} = 0$), este estimador es el mejor estimador de \hat{x}_2 dado el conocimiento de $\hat{x}_1 = 0$, en cuanto a que es no sesgado y su matriz de covarianza es la mínima posible.

Se puede encontrar un mejor estimador ocupando la información dada por la correlación, con el siguiente método. Dado que \mathbf{P} es definida positiva, se puede factorizar esta matriz como $\mathbf{P} = \mathbf{C}\mathbf{C}^T$, donde \mathbf{C} es triangular inferior con elementos positivos en la diagonal. Esta factorización se conoce como la factorización de Cholesky [51]. Para este ejemplo,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sqrt{P_{11}} & 0 \\ \frac{P_{12}}{P_{11}} & \sqrt{P_{22} - \frac{P_{12}^2}{P_{11}}} \end{bmatrix}.$$

Note que el estimador $\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{C}^{-1}\hat{\mathbf{X}}$ tiene varianza unitaria, es decir, el estimador se blanquea con \mathbf{C}^{-1} :

$$\mathbb{E}\{(\bar{\mathbf{X}} - \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\mu})(\bar{\mathbf{X}} - \mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\mu})^T\} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{C}^{-T} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{C}^T\mathbf{C}^{-T} = \mathbf{I}_2.$$

Esta forma de blanqueado se conoce en la literatura como *Cholesky whitening* [5]. Se propone el estimador

$$\tilde{\mathbf{X}}_c = \mathbf{C} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{C}^{-1}\hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{x}_2 - \frac{P_{12}}{P_{11}}\hat{x}_1 \end{bmatrix}. \quad (5.2.2)$$

Es decir, el estimador presentado en (5.2.2) realiza la proyección causal al estimador blanqueado $\bar{\mathbf{X}}$, para luego revertir el blanqueado. Este estimador se ha estudiado de forma teórica en [6], pero sin una aplicación concreta en estimación no paramétrica por análisis espectral.

Nótese que para la construcción de este nuevo estimador, se requiere conocer la matriz de covarianza de los datos causales y no causales. En una estructura output error, esta matriz se puede deducir a partir de los datos de entrada y la varianza del ruido blanco y por ende, el estimador es calculable en la práctica.

A continuación se analizan las propiedades estocásticas del estimador (5.2.2):

▪ Esperanza:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\{\tilde{\mathbf{X}}_c\} &= \begin{bmatrix} \sqrt{P_{11}} & 0 \\ \frac{P_{12}}{P_{11}} & \sqrt{P_{22} - \frac{P_{12}^2}{P_{11}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{P_{11}}} & 0 \\ \frac{-P_{12}}{\sqrt{P_{11}P_{22} - P_{11}P_{12}^2}} & \frac{1}{\sqrt{P_{22} - \frac{P_{12}^2}{P_{11}}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{P_{11}} & 0 \\ \frac{P_{12}}{P_{11}} & \sqrt{P_{22} - \frac{P_{12}^2}{P_{11}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\mu_2}{\sqrt{P_{22} - \frac{P_{12}^2}{P_{11}}}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ \mu_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Es decir, el estimador (5.2.2) es no sesgado.

- Varianza:

$$\begin{aligned} E\{(\tilde{\mathbf{X}}_c - \boldsymbol{\mu})(\tilde{\mathbf{X}}_c - \boldsymbol{\mu})^T\} &= \mathbf{C} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{C}^T \mathbf{C}^{-T} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{C}^T \\ &= \mathbf{C} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{C}^T \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P_{22} - \frac{P_{21}^2}{P_{11}} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Dado que \mathbf{P} es definida positiva, su determinante es positivo y por ende, suponiendo $P_{11} \neq 0$, se tiene $0 < P_{22} - \frac{P_{21}^2}{P_{11}} \leq P_{22}$. Es consecuencia, $\tilde{\mathbf{X}}_c$ estima $\hat{\mathbf{X}}$ con la misma media y con menor o igual varianza que el estimador (5.2.1). Es decir, el nuevo estimador tiene mejores propiedades estocásticas que la opción tradicional.

Con este ejemplo en mente, se extiende esta idea para el problema de causalidad en la próxima sección.

5.3. Formulación de ETFE causal

En esta sección se construye y analiza teóricamente el nuevo estimador ETFE, que produce estimaciones causales independiente de la señal de entrada. El objetivo es estimar

$$\hat{\mathbf{g}} := \begin{bmatrix} \hat{g}_{-M} \\ \vdots \\ \hat{g}_0 \\ \vdots \\ \hat{g}_N \end{bmatrix}$$

sabiendo que los valores verdaderos de la respuesta a impulso satisfacen $g_{-M}^0 = g_{-M+1}^0 = \dots = g_{-1}^0 = 0$ (posiblemente g_0^0 también). Usando el resultado obtenido de la ETFE en (3.3.1) y (3.3.2),

se obtiene que $\hat{\mathbf{g}}$ es una variable aleatoria con media $\boldsymbol{\mu}$ y matriz de covarianza $\mathbf{P} := \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \hline \mathbf{P}_{12}^T & \mathbf{P}_{22} \end{array} \right]$,

donde:

$$\boldsymbol{\mu} := \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^N m_k \alpha_{-M-k} \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^N m_k \alpha_{-1-k} \\ g_0^0 + \sum_{k=1}^N m_k \alpha_{-k} \\ \vdots \\ g_N^0 + \sum_{k=1}^N m_k \alpha_{N-k} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{P} = \sigma^2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} \sum_{t=1}^N \alpha_{-M-t}^2 & \cdots & \sum_{t=1}^N \alpha_{-M-t} \alpha_{-1-t} & \sum_{t=1}^N \alpha_{-M-t} \alpha_{-t} & \cdots & \sum_{t=1}^N \alpha_{-M-t} \alpha_{N-t} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{t=1}^N \alpha_{-1-t} \alpha_{-M-t} & \cdots & \sum_{t=1}^N \alpha_{-1-t}^2 & \sum_{t=1}^N \alpha_{-1-t} \alpha_{-t} & \cdots & \sum_{t=1}^N \alpha_{-1-t} \alpha_{N-t} \\ \hline \sum_{t=1}^N \alpha_{-t} \alpha_{-M-t} & \cdots & \sum_{t=1}^N \alpha_{-t} \alpha_{-1-t} & \sum_{t=1}^N \alpha_{-t}^2 & \cdots & \sum_{t=1}^N \alpha_{-t} \alpha_{N-t} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{t=1}^N \alpha_{N-t} \alpha_{-M-t} & \cdots & \sum_{t=1}^N \alpha_{N-t} \alpha_{-1-t} & \sum_{t=1}^N \alpha_{N-t} \alpha_{-t} & \cdots & \sum_{t=1}^N \alpha_{N-t}^2 \end{array} \right].$$

Se recuerda que el estimador ETFE es asintóticamente no sesgado, es decir, bajo condiciones razonables la secuencia m_k tiende a cero para $N \rightarrow \infty$ y por ende, para N grande los términos asociados a m_k son despreciables. Sin embargo, no se requiere despreciarlos en este análisis.

Naturalmente, la primera opción para estimar $\hat{\mathbf{g}}$ causal consiste en simplemente truncar la parte no causal:

$$\tilde{\mathbf{g}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{M \times M} & \mathbf{0}_{M \times (N+1)} \\ \hline \mathbf{0}_{(N+1) \times M} & \mathbf{I}_{N+1} \end{array} \right] \hat{\mathbf{g}}, \quad (5.3.1)$$

donde la media y matriz de covarianza de $\tilde{\mathbf{g}}$ están dadas por

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \left[\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{array} \right], \quad \tilde{\mathbf{P}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{M \times M} & \mathbf{0}_{M \times (N+1)} \\ \hline \mathbf{0}_{(N+1) \times M} & \mathbf{P}_{22} \end{array} \right].$$

Nótese que esta estimación es lo mejor que se puede hacer si u_t produce a priori una estimación causal. Se recuerda que esto sucede cuando el polinomio $z^N(N_U(z))^{-1}$ tiene todos sus polos en el círculo unitario. En este caso, se tiene $\alpha_t = 0$ para todo $t < -1$, lo cual implica que las matrices \mathbf{P}_{11} y \mathbf{P}_{12} sean matrices nulas de dimensiones apropiadas, obteniéndose (5.3.1). Esto tiene sentido, pues el estimador entregará el valor cero en la parte no causal con probabilidad 1.

A continuación se formula un mejor estimador. Dado que la matriz \mathbf{P} es semidefinida positiva, tiene factorización de Cholesky dada por $\mathbf{P} = \mathbf{C}\mathbf{C}^T$. Esta matriz se puede encontrar explícitamente por (3.3.6) como $\mathbf{C} = \sigma\mathbf{T}(\beta)\mathbf{Q}$, donde \mathbf{Q} es una matriz ortogonal apropiada tal que \mathbf{C} es triangular inferior con elementos no negativos en su diagonal. Esto se puede hacer sin problemas factorizando $\sigma\mathbf{T}(\beta)^T = \mathbf{Q}\mathbf{R}$, con \mathbf{R} triangular superior. Así, es fácil obtener \mathbf{C} como $\mathbf{C} = \sigma\mathbf{T}(\beta)\mathbf{Q}$, tal como se explica en el Apéndice, sección A.4.

Entonces, téngase el estimador de respuesta a impulso causal $\tilde{\mathbf{g}}_c$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{g}}_c &= \mathbf{C} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{M \times M} & \mathbf{0}_{M \times (N+1)} \\ \hline \mathbf{0}_{(N+1) \times M} & \mathbf{I}_{N+1} \end{array} \right] \mathbf{C}^{-1} \hat{\mathbf{g}} \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{0}_{M \times (N+1)} \\ \hline \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{M \times M} & \mathbf{0}_{M \times (N+1)} \\ \hline \mathbf{0}_{(N+1) \times M} & \mathbf{I}_{N+1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} (\mathbf{C}^{-1})_{11} & \mathbf{0}_{M \times (N+1)} \\ \hline (\mathbf{C}^{-1})_{21} & (\mathbf{C}^{-1})_{22} \end{array} \right] \hat{\mathbf{g}}, \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

donde \mathbf{C}_{11} y $(\mathbf{C}^{-1})_{11}$ son matrices de tamaño $M \times M$, denotado como $\mathbf{C}_{11}, (\mathbf{C}^{-1})_{11} \in \mathbb{R}^{M \times M}$; $\mathbf{C}_{21}, (\mathbf{C}^{-1})_{21} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times M}$, y $\mathbf{C}_{22}, (\mathbf{C}^{-1})_{22} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$.

Se tienen las siguientes propiedades de interés:

- Esperanza:

$$E\{\tilde{\mathbf{g}}_c\} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N+1} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} (\mathbf{C}^{-1})_{11} & \mathbf{0} \\ \hline (\mathbf{C}^{-1})_{21} & (\mathbf{C}^{-1})_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{array} \right]$$

$$= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{C}_{22}(\mathbf{C}^{-1})_{21} & \mathbf{C}_{22}(\mathbf{C}^{-1})_{22} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix}.$$

Por álgebra de matrices por bloques (ver Apéndice, sección A.4.1), se sabe que $(\mathbf{C}^{-1})_{21} = -\mathbf{C}_{22}^{-1}\mathbf{C}_{21}\mathbf{C}_{11}^{-1}$, $(\mathbf{C}^{-1})_{22} = \mathbf{C}_{22}^{-1}$. Entonces,

$$E\{\tilde{\mathbf{g}}_c\} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline -\mathbf{C}_{21}\mathbf{C}_{11}^{-1} & \mathbf{I}_{N+1} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{M \times 1} \\ \boldsymbol{\mu}_2 - \mathbf{C}_{21}\mathbf{C}_{11}^{-1}\boldsymbol{\mu}_1 \end{bmatrix}.$$

Como $\boldsymbol{\mu}_1$ tiende al vector cero a medida que $N \rightarrow \infty$, el estimador (5.3.2) es asintóticamente no sesgado para las muestras causales.

■ Covarianza:

$$\begin{aligned} E\{(\tilde{\mathbf{g}}_c - E\{\tilde{\mathbf{g}}_c\})(\tilde{\mathbf{g}}_c - E\{\tilde{\mathbf{g}}_c\})^T\} &= \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N+1} \end{bmatrix} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{C}^T \mathbf{C}^{-T} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N+1} \end{bmatrix} \mathbf{C}^T \\ &= \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N+1} \end{bmatrix} \mathbf{C}^T \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{22}\mathbf{C}_{22}^T \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{11} & \tilde{\mathbf{P}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{P}}_{12}^T & \tilde{\mathbf{P}}_{22} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

donde $\tilde{\mathbf{P}}_{11} \in \mathbb{R}^{M \times M}$ y $\tilde{\mathbf{P}}_{12} \in \mathbb{R}^{M \times (N+1)}$ son matrices nulas. Ya calculada la esperanza y covarianza de este estimador, se presentan los siguientes resultados.

Teorema 5.3.1. *El estimador (5.3.2) tiene menor o igual matriz de covarianza que el estimador tradicional de la respuesta a impulso por ETFE, presentado en (5.3.1).*

Demostración. Se expresa \mathbf{P} como

$$\mathbf{P} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C}_{11}^T & \mathbf{C}_{21}^T \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{C}_{22}^T \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C}_{11}\mathbf{C}_{11}^T & \mathbf{C}_{11}\mathbf{C}_{21}^T \\ \hline \mathbf{C}_{21}\mathbf{C}_{11}^T & \mathbf{C}_{21}\mathbf{C}_{21}^T + \mathbf{C}_{22}\mathbf{C}_{22}^T \end{array} \right].$$

Entonces,

$$\mathbf{x}^T (\mathbf{P}_{22} - \tilde{\mathbf{P}}_{22}) \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{C}_{21} \mathbf{C}_{21}^T \mathbf{x} = (\mathbf{C}_{21}^T \mathbf{x})^T (\mathbf{C}_{21}^T \mathbf{x}) = \|\mathbf{C}_{21}^T \mathbf{x}\|^2 \geq 0, \quad (5.3.4)$$

donde $\|\cdot\|_2$ denota a la norma-2 vectorial. A partir de (5.3.11) se tiene $\mathbf{P}_{22} \geq \tilde{\mathbf{P}}_{22}$. \square

Antes de presentar el próximo teorema, se supone que γ es elegido proporcional a¹ N . Para esta elección de γ , nos enfocamos en mejorar la varianza del estimador ETFE.

Un estimador linealmente dependiente de $\hat{\mathbf{g}}$ es un estimador asintóticamente no sesgado de $\{g_k^0\}_{k \geq 0}$ si es de la forma

$$\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{A} \hat{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{g}}, \quad (5.3.5)$$

¹ Este supuesto está basado en regla práctica de partir con $\gamma = N/20$, y luego incrementar el valor de γ hasta que el usuario note que los detalles son predominantemente espurios.

donde \mathbf{A}_{12} y \mathbf{A}_{22} convergen débilmente a $\mathbf{0}_{M \times (N+1)}$ y \mathbf{I}_{N+1} respectivamente a medida que $N \rightarrow \infty$. Para el Teorema 5.3.2 decimos, con cierto abuso de notación, que $\tilde{\mathbf{g}}$ es un estimador lineal causal asintóticamente no sesgado de $\{g_k^0\}_{k \geq 0}$ si es de la forma

$$\tilde{\mathbf{g}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0}_{M \times (N+1)} \\ \hline \mathbf{A}_{21} & \mathbf{I}_{N+1} \end{array} \right] \hat{\mathbf{g}}. \quad (5.3.6)$$

Teorema 5.3.2. *El estimador (5.3.2) es el estimador causal asintóticamente no sesgado que presenta menor matriz de covarianza dentro de todos los estimadores lineales de la forma (5.3.6).*

Demostración. Se sabe que

$$\tilde{\mathbf{g}}_c = \mathbf{C} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I}_{N+1} \end{array} \right] \mathbf{C}^{-1} \hat{\mathbf{g}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline -\mathbf{C}_{21} \mathbf{C}_{11}^{-1} & \mathbf{I}_{N+1} \end{array} \right] \hat{\mathbf{g}}. \quad (5.3.7)$$

Se demostrará que $\text{Cov}(\tilde{\mathbf{g}}) - \text{Cov}(\tilde{\mathbf{g}}_c) \geq 0$, donde $\tilde{\mathbf{g}}$ se encuentra definido en (5.3.6). Se calculan las covarianzas:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\tilde{\mathbf{g}}) &= \mathbf{A} \mathbf{P} \mathbf{A}^T \\ &= (\mathbf{A} \mathbf{C})(\mathbf{A} \mathbf{C})^T \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{0}_{M \times (N+1)} \\ \hline \mathbf{A}_{21} \mathbf{C}_{11} + \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C}_{11}^T \mathbf{A}_{11}^T & \mathbf{C}_{11}^T \mathbf{A}_{21}^T + \mathbf{C}_{21}^T \\ \hline \mathbf{0}_{(N+1) \times M} & \mathbf{C}_{22}^T \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} \mathbf{C}_{11} \mathbf{C}_{11}^T \mathbf{A}_{11}^T & \mathbf{A}_{11} \mathbf{C}_{11} \mathbf{C}_{11}^T \mathbf{A}_{21}^T + \mathbf{A}_{11} \mathbf{C}_{11} \mathbf{C}_{21}^T \\ \hline \mathbf{A}_{21} \mathbf{C}_{11} \mathbf{C}_{11}^T \mathbf{A}_{11}^T + \mathbf{C}_{21} \mathbf{C}_{11}^T \mathbf{A}_{11}^T & \mathbf{A}_{21} \mathbf{C}_{11} \mathbf{C}_{11}^T \mathbf{A}_{21}^T + \mathbf{A}_{21} \mathbf{C}_{11} \mathbf{C}_{21}^T + \mathbf{C}_{21} \mathbf{C}_{11}^T \mathbf{A}_{21}^T + \mathbf{C}_{21} \mathbf{C}_{21}^T + \mathbf{C}_{22} \mathbf{C}_{22}^T \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

Por otra parte, la matriz de covarianza de $\tilde{\mathbf{g}}_c$ ya ha sido calculada en (5.3.3), obteniéndose que

$$\text{Cov}(\tilde{\mathbf{g}}_c) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{C}_{22} \mathbf{C}_{22}^T \end{array} \right]. \quad (5.3.9)$$

Restando (5.3.9) de (5.3.8) se tiene

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\tilde{\mathbf{g}}) - \text{Cov}(\tilde{\mathbf{g}}_c) &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} \mathbf{C}_{11} \mathbf{C}_{11}^T \mathbf{A}_{11}^T & \mathbf{A}_{11} \mathbf{C}_{11} \mathbf{C}_{11}^T \mathbf{A}_{21}^T + \mathbf{A}_{11} \mathbf{C}_{11} \mathbf{C}_{21}^T \\ \hline \mathbf{A}_{21} \mathbf{C}_{11} \mathbf{C}_{11}^T \mathbf{A}_{11}^T + \mathbf{C}_{21} \mathbf{C}_{11}^T \mathbf{A}_{11}^T & \mathbf{A}_{21} \mathbf{C}_{11} \mathbf{C}_{11}^T \mathbf{A}_{21}^T + \mathbf{A}_{21} \mathbf{C}_{11} \mathbf{C}_{21}^T + \mathbf{C}_{21} \mathbf{C}_{11}^T \mathbf{A}_{21}^T + \mathbf{C}_{21} \mathbf{C}_{21}^T \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{0}_{M \times (N+1)} \\ \hline \mathbf{A}_{21} \mathbf{C}_{11} + \mathbf{C}_{21} & \mathbf{0}_{(N+1) \times (N+1)} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{0}_{M \times (N+1)} \\ \hline \mathbf{A}_{21} \mathbf{C}_{11} + \mathbf{C}_{21} & \mathbf{0}_{(N+1) \times (N+1)} \end{array} \right]^T, \end{aligned}$$

lo cual es una matriz semidefinida positiva para cualquier elección de \mathbf{A}_{11} y \mathbf{A}_{21} , ya que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}^T \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{0}_{M \times (N+1)} \\ \hline \mathbf{A}_{21} \mathbf{C}_{11} + \mathbf{C}_{21} & \mathbf{0}_{(N+1) \times (N+1)} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{0}_{M \times (N+1)} \\ \hline \mathbf{A}_{21} \mathbf{C}_{11} + \mathbf{C}_{21} & \mathbf{0}_{(N+1) \times (N+1)} \end{array} \right]^T \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \\ \left\| \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{A}_{21} \mathbf{C}_{11} + \mathbf{C}_{21} & \mathbf{0} \end{array} \right]^T \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \right\|_2^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

Naturalmente, la igualdad en (5.3.10) sólo se consigue cuando $\mathbf{A}_{11} = \mathbf{0}$, $\mathbf{A}_{21} = -\mathbf{C}_{21} \mathbf{C}_{11}^{-1}$, que corresponde al estimador (5.3.7). \square

Además de los resultados anteriores, que indican mejoras en varianza del estimador ETFE causal con respecto al tradicional, es interesante notar que la estimación por ETFE con distintos valores de M no altera la matriz de covarianza de los coeficientes causales, como se demuestra a continuación:

Teorema 5.3.3. *Sea M entero positivo menor que N . La matriz de covarianza de ETFE de los coeficientes causales es idéntica para cualquier elección de M .*

Demostración. Sean M_1 y M_2 positivos, ambos menores que N . Sin pérdida de generalidad, se considera $M_1 < M_2$. La matriz de covarianza de la estimación de la respuesta a impulso por ETFE considerando M_1 términos no causales es

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{M_1} &= \sigma^2 \begin{bmatrix} \alpha_{-M_1-1} & \cdots & \alpha_{-N-M_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{N-1} & \cdots & \alpha_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{-M_1-1} & \cdots & \alpha_{N-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{-N-M_1} & \cdots & \alpha_0 \end{bmatrix} \\ &= \sigma^2 \mathbf{T}_{M_1}(\beta) \mathbf{T}_{M_1}(\beta)^T. \end{aligned}$$

Por otra parte, la matriz de covarianza de la estimación de la respuesta a impulso por ETFE considerando M_2 términos no causales se puede expresar como

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{M_2} &= \sigma^2 \begin{bmatrix} \alpha_{-M_2-1} & \cdots & \alpha_{-N-M_2} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{-M_1-2} & \cdots & \alpha_{-N-M_1-1} \\ \alpha_{-M_1-1} & \cdots & \alpha_{-N-M_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{N-1} & \cdots & \alpha_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{-M_2-1} & \cdots & \alpha_{-M_1-2} & \alpha_{-M_1-1} & \cdots & \alpha_{N-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{-N-M_2} & \cdots & \alpha_{-N-M_1-1} & \alpha_{-N-M_1} & \cdots & \alpha_0 \end{bmatrix} \\ &= \sigma^2 \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{2-1} \\ \mathbf{T}_{M_1}(\beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{2-1}^T & | & \mathbf{T}_{M_1}(\beta)^T \end{bmatrix} \\ &= \sigma^2 \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{2-1} \mathbf{T}_{2-1}^T & | & \mathbf{T}_{2-1} \mathbf{T}_{M_1}(\beta)^T \\ \hline \mathbf{T}_{M_1}(\beta) \mathbf{T}_{2-1}^T & | & \mathbf{T}_{M_1}(\beta) \mathbf{T}_{M_1}(\beta)^T \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

de modo que

$$\mathbf{P}_{M_2} = \begin{bmatrix} \sigma^2 \mathbf{T}_{2-1} \mathbf{T}_{2-1}^T & | & \sigma^2 \mathbf{T}_{2-1} \mathbf{T}_{M_1}(\beta)^T \\ \hline \sigma^2 \mathbf{T}_{M_1}(\beta) \mathbf{T}_{2-1}^T & | & \mathbf{P}_{M_1} \end{bmatrix}, \quad (5.3.11)$$

donde se ha ocupado la notación $\mathbf{T}_{M_1}(\beta)$ definida en (3.3.4) y (3.3.5).

La matriz de covarianza de los coeficientes causales está dada por los elementos de las últimas N filas y N columnas de \mathbf{P}_{M_2} . Estos coinciden con los elementos de las últimas N filas y N columnas de \mathbf{P}_{M_1} , por (5.3.11). \square

Antes de enunciar el último teorema de esta sección, se tiene el siguiente lema de interés.

Lema 5.3.1. *Sea $X = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & | & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{B}^T & | & \mathbf{C} \end{bmatrix}$ una matriz simétrica semidefinida positiva particionada por bloques. Entonces, se cumple*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & | & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{B}^T & | & \mathbf{C} \end{bmatrix}^\dagger - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & | & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & | & \mathbf{C}^\dagger \end{bmatrix} \geq 0, \quad (5.3.12)$$

donde \mathbf{X}^\dagger denota la pseudo inversa de la matriz \mathbf{X} .

Demostración. Se sabe que la pseudo inversa de una matriz \mathbf{X} simétrica semidefinida positiva particionada puede expresarse como [58]

$$\mathbf{X}^\dagger = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{C} \end{array} \right]^\dagger = \left[\begin{array}{c|c} (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}^\dagger\mathbf{B}^T)^\dagger & -(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}^\dagger\mathbf{B}^T)^\dagger\mathbf{B}\mathbf{C}^\dagger \\ \hline -\mathbf{C}^\dagger\mathbf{B}^T(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}^\dagger\mathbf{B}^T)^\dagger & \mathbf{C}^\dagger + \mathbf{C}^\dagger\mathbf{B}^T(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}^\dagger\mathbf{B}^T)^\dagger\mathbf{B}\mathbf{C}^\dagger \end{array} \right].$$

Entonces, se tiene

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{C} \end{array} \right]^\dagger - \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^\dagger \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}^\dagger\mathbf{B}^T)^\dagger & -(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}^\dagger\mathbf{B}^T)^\dagger\mathbf{B}\mathbf{C}^\dagger \\ \hline -\mathbf{C}^\dagger\mathbf{B}^T(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}^\dagger\mathbf{B}^T)^\dagger & \mathbf{C}^\dagger\mathbf{B}^T(\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}^\dagger\mathbf{B}^T)^\dagger\mathbf{B}\mathbf{C}^\dagger \end{array} \right]. \quad (5.3.13)$$

Dado que \mathbf{A} y \mathbf{X} son semidefinidas positivas, el complemento de Schur de \mathbf{C} con respecto a \mathbf{X} , $\mathbf{C}|\mathbf{X} := \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}^\dagger\mathbf{B}^T$, es semidefinido positivo [59]. Por ende, su pseudoinversa también es semidefinida positiva, y como es matriz simétrica, admite una factorización de Cholesky. Así, se puede expresar (5.3.13) como

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{C} \end{array} \right]^\dagger - \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^\dagger \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} \text{Chol}((\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}^\dagger\mathbf{B}^T)^\dagger) & \\ \hline -\mathbf{C}^\dagger\mathbf{B}^T\text{Chol}((\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}^\dagger\mathbf{B}^T)^\dagger) & \left[\text{Chol}((\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}^\dagger\mathbf{B}^T)^\dagger)^T \mid -\text{Chol}((\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{C}^\dagger\mathbf{B}^T)^\dagger)^T\mathbf{B}\mathbf{C}^\dagger \right] \end{array} \right],$$

lo cual claramente es una matriz semidefinida positiva pues es de la forma $\mathbf{L}\mathbf{L}^T$. \square

El teorema siguiente se refiere a qué sucede con la matriz de covarianza de los datos causales de la ETFE causal al aumentar la cantidad de datos no causales M .

Teorema 5.3.4. *Sean $0 < M_1 < M_2 < N$, números enteros. Defínase la matriz de covarianza de las estimaciones de la respuesta a impulso por ETFE causal como $\tilde{\mathbf{P}}_{M_1}$ y $\tilde{\mathbf{P}}_{M_2}$ para M_1 y M_2 datos no causales respectivamente. La matriz de covarianza de los datos causales de la estimación con M_1 es mayor o igual que la matriz de covarianza de los datos causales usando M_2 .*

Demostración. De forma análoga a lo desarrollado en la demostración anterior, la matriz de covarianza de la estimación de la respuesta a impulso por ETFE considerando M_1 datos no causales se puede expresar como

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{M_1} &= \sigma^2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} \alpha_{-M_1-1} & \dots & \alpha_{-N-M_1} & & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ \alpha_{-2} & \dots & \alpha_{-N-1} & & & \\ \alpha_{-1} & \dots & \alpha_{-N} & & & \\ \vdots & & \vdots & & & \\ \alpha_{N-1} & \dots & \alpha_0 & & & \end{array} \right] \left[\begin{array}{ccc|ccc} \alpha_{-M_1-1} & \dots & \alpha_{-2} & \alpha_{-1} & \dots & \alpha_{N-1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{-N-M_1} & \dots & \alpha_{-N-1} & \alpha_{-N} & \dots & \alpha_0 \end{array} \right] \\ &= \sigma^2 \left[\begin{array}{c} \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta) \\ \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta)^T & \\ \hline \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta)^T & \end{array} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma^2 \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta)^T & \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta)^T \\ \hline \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta)^T & \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta)^T \end{array} \right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C}_{M_1}^{11} & \mathbf{0}_{M_1 \times (N+1)} \\ \hline \mathbf{C}_{M_1}^{21} & \mathbf{C}_{M_1}^{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C}_{M_1}^{11 T} & \mathbf{C}_{M_1}^{21 T} \\ \hline \mathbf{0}_{(N+1) \times M_1} & \mathbf{C}_{M_1}^{22 T} \end{array} \right],
\end{aligned}$$

donde $\mathbf{C}_{M_1}^{22} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$. Esta matriz se puede determinar a partir de un resultado conocido sobre factorización de Cholesky para matrices particionadas [60]:

$$\mathbf{C}_{M_1}^{22} = \sigma \text{Chol} \left(\mathbf{T}_{M_1}^2(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta)^T - \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta)^T (\mathbf{T}_{M_1}^1(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta)^T)^\dagger \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta)^T \right), \quad (5.3.14)$$

donde $\text{Chol}(\mathbf{X})$ es la matriz de factorización de Cholesky de la matriz \mathbf{X} . Teniendo esta factorización de \mathbf{P}_{M_1} en consideración, se determina la covarianza del estimador causal en (5.3.9), obteniéndose que

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{P}}_{M_1} &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{C}_{M_1}^{22} \mathbf{C}_{M_1}^{22 T} \end{array} \right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta)^T - \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta)^T (\mathbf{T}_{M_1}^1(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta)^T)^\dagger \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta)^T \end{array} \right].
\end{aligned}$$

Ahora se analiza la matriz \mathbf{P}_{M_2} . Ésta se puede expresar como

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{M_2} &= \sigma^2 \left[\begin{array}{c|c} \alpha_{-M_2-1} & \dots & \alpha_{-N-M_2} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{-M_1-2} & \dots & \alpha_{-N-M_1-1} \\ \hline \alpha_{-M_1-1} & \dots & \alpha_{-N-M_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{-2} & \dots & \alpha_{-N-1} \\ \hline \alpha_{-1} & \dots & \alpha_{-N} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{N-1} & \dots & \alpha_0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c|c|c} \alpha_{-M_2-1} & \dots & \alpha_{-M_1-2} & \vdots & \alpha_{-M_1-1} & \dots & \alpha_{-2} & \vdots & \alpha_{-1} & \dots & \alpha_{N-1} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{-N-M_2} & \dots & \alpha_{-N-M_1-1} & \vdots & \alpha_{-N-M_1} & \dots & \alpha_{-N-1} & \vdots & \alpha_{-N} & \dots & \alpha_0 \end{array} \right] \\
&= \sigma^2 \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{T}_{2-1} & \\ \hline \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta) & \\ \hline \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta) & \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{T}_{2-1}^T & \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta)^T & \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta)^T \end{array} \right] \\
&= \sigma^2 \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathbf{T}_{2-1} \mathbf{T}_{2-1}^T & \vdots & \mathbf{T}_{2-1} \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta)^T & \mathbf{T}_{2-1} \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta)^T \\ \hline \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta) \mathbf{T}_{2-1}^T & \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta)^T & \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta)^T & \\ \hline \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta) \mathbf{T}_{2-1}^T & \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta)^T & \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta)^T & \end{array} \right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C}_{M_2}^{11} & \mathbf{0}_{M_2 \times (N+1)} \\ \hline \mathbf{C}_{M_2}^{21} & \mathbf{C}_{M_2}^{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{C}_{M_2}^{11 T} & \mathbf{C}_{M_2}^{21 T} \\ \hline \mathbf{0}_{(N+1) \times M_2} & \mathbf{C}_{M_2}^{22 T} \end{array} \right],
\end{aligned}$$

donde $\mathbf{C}_{M_2}^{22} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$. Al igual que para \mathbf{P}_{M_1} , esta matriz se puede determinar a partir de la factorización de Cholesky para matrices particionadas:

$$\mathbf{C}_{M_2}^{22} = \sigma \text{Chol} \left(\mathbf{T}_{M_1}^2(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta)^T - \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta) \mathbf{T}_{2-1}^T & \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta)^T \end{array} \right] \right)$$

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{T}_{2-1} \mathbf{T}_{2-1}^T & \mathbf{T}_{2-1} \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta)^T \\ \hline \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta) \mathbf{T}_{2-1}^T & \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta)^T \end{array} \right]^\dagger \left[\begin{array}{c} \mathbf{T}_{2-1} \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta)^T \\ \hline \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta)^T \end{array} \right]. \quad (5.3.15)$$

De forma análoga que para \mathbf{P}_{M_1} , la matriz de covarianza con ETFE causal sólo depende de la matriz $\mathbf{C}_{M_2}^{22}$:

$$\tilde{\mathbf{P}}_{M_2} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{C}_{M_2}^{22} \mathbf{C}_{M_2}^{22T} \end{array} \right].$$

Entonces, basta demostrar que $\mathbf{C}_{M_1}^{22} \mathbf{C}_{M_1}^{22T} - \mathbf{C}_{M_2}^{22} \mathbf{C}_{M_2}^{22T} \geq 0$. Usando (5.3.14) y (5.3.15), se determina $\mathbf{C}_{M_1}^{22} \mathbf{C}_{M_1}^{22T} - \mathbf{C}_{M_2}^{22} \mathbf{C}_{M_2}^{22T}$ como

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{M_1}^{22} \mathbf{C}_{M_1}^{22T} - \mathbf{C}_{M_2}^{22} \mathbf{C}_{M_2}^{22T} &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta) \mathbf{T}_{2-1}^T & \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta)^T \\ \hline \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta) \mathbf{T}_{2-1}^T & \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta)^T \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{T}_{2-1} \mathbf{T}_{2-1}^T & \mathbf{T}_{2-1} \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta)^T \\ \hline \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta) \mathbf{T}_{2-1}^T & \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta)^T \end{array} \right]^\dagger \left[\begin{array}{c} \mathbf{T}_{2-1} \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta)^T \\ \hline \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta)^T \end{array} \right] \\ &\quad - \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta)^T (\mathbf{T}_{M_1}^1(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta)^T)^\dagger \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta)^T, \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{M_1}^{22} \mathbf{C}_{M_1}^{22T} - \mathbf{C}_{M_2}^{22} \mathbf{C}_{M_2}^{22T} &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta) \mathbf{T}_{2-1}^T & \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta)^T \\ \hline \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta) \mathbf{T}_{2-1}^T & \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta)^T \end{array} \right] \\ &\quad \left(\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{T}_{2-1} \mathbf{T}_{2-1}^T & \mathbf{T}_{2-1} \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta)^T \\ \hline \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta) \mathbf{T}_{2-1}^T & \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta)^T \end{array} \right]^\dagger - \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & (\mathbf{T}_{M_1}^1(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta)^T)^\dagger \end{array} \right] \right) \left[\begin{array}{c} \mathbf{T}_{2-1} \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta)^T \\ \hline \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta)^T \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Ocupando el lema 5.3.1 para $\mathbf{A} = \mathbf{T}_{2-1} \mathbf{T}_{2-1}^T$, $\mathbf{B} = \mathbf{T}_{2-1} \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta)^T$ y $\mathbf{C} = \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta)^T$, se obtiene que la matriz $\mathbf{C}_{M_1}^{22} \mathbf{C}_{M_1}^{22T} - \mathbf{C}_{M_2}^{22} \mathbf{C}_{M_2}^{22T}$ puede escribirse como $\mathbf{KLL}^T \mathbf{K}^T$, donde

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \left[\begin{array}{c} \text{Chol} \left((\mathbf{T}_{2-1} \mathbf{T}_{2-1}^T - \mathbf{T}_{2-1} \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta)^T (\mathbf{T}_{M_1}^1(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta)^T)^\dagger \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta) \mathbf{T}_{2-1}^T)^\dagger \right) \\ \hline -(\mathbf{T}_{M_1}^1(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta)^T)^\dagger \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta) \mathbf{T}_{2-1}^T \text{Chol} \left((\mathbf{T}_{2-1} \mathbf{T}_{2-1}^T - \mathbf{T}_{2-1} \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta)^T (\mathbf{T}_{M_1}^1(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta)^T)^\dagger \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta) \mathbf{T}_{2-1}^T)^\dagger \right) \end{array} \right] \\ \mathbf{K} &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta) \mathbf{T}_{2-1}^T & \mathbf{T}_{M_1}^2(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta)^T \\ \hline \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta) \mathbf{T}_{2-1}^T & \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta) \mathbf{T}_{M_1}^1(\beta)^T \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Así, para un vector \mathbf{x} arbitrario de dimensión adecuada,

$$\mathbf{x}^T (\mathbf{C}_{M_1}^{22} \mathbf{C}_{M_1}^{22T} - \mathbf{C}_{M_2}^{22} \mathbf{C}_{M_2}^{22T}) \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{KLL}^T \mathbf{K}^T \mathbf{x} = (\mathbf{L}^T \mathbf{K}^T \mathbf{x})^T (\mathbf{L}^T \mathbf{K}^T \mathbf{x}) = \|\mathbf{L}^T \mathbf{K}^T \mathbf{x}\|_2^2 \geq 0, \quad (5.3.16)$$

con lo cual se concluye que $\mathbf{C}_{M_1}^{22} \mathbf{C}_{M_1}^{22T} \geq \mathbf{C}_{M_2}^{22} \mathbf{C}_{M_2}^{22T}$, es decir, que la matriz de covarianza de la estimación causal con M_2 es menor o igual a la matriz de covarianza de la estimación causal con M_1 , con $M_2 > M_1$.

Observación 5.3.1. *El teorema anterior también puede ser demostrado escribiendo las matrices de covarianza de los datos causales como complementos de Schur, y luego aplicando la desigualdad matricial demostrada en [61, Teorema 2.1].*

□

5.4. Implementación y simulaciones

En esta sección se muestran ejemplos de lo anteriormente discutido en la teoría, indicando las principales consideraciones para replicar los resultados, y simulaciones en 3 tipos de sistemas distintos con el análisis de sus respectivos resultados.

5.4.1. Consideraciones previas

Para la implementación, se consideran los siguientes detalles:

- Dado que se obtienen matrices \mathbf{P} semidefinidas positivas (nunca serán estrictamente definidas positivas, como se demostró en el Teorema 3.3.1), se puede construir la matriz \mathbf{C} a partir de la factorización \mathbf{QR} de la factorización raíz cuadrada de \mathbf{P} , según [62]. Para esta manera de proceder, los elementos de \mathbf{P} están dados por (3.3.2). Para disminuir los potenciales errores de redondeo, es posible construir la matriz \mathbf{C} directamente usando $\sigma\mathbf{T}(\beta)\mathbf{Q}$, donde \mathbf{Q} es la matriz ortogonal de la factorización \mathbf{QR} de $\mathbf{T}(\beta)^T$, con $\mathbf{T}(\beta)$ definido en (3.3.5).
- Se supone que $z^N(N_U(z))^{-1}$ no tiene polos en $|z| = 1$. Así, los coeficientes α_k corresponden a la serie de Laurent $z^N(N_U(z))^{-1}$. Para el cálculo de la serie de Laurent, se calcula α_k para $k = \{-N - M, -N - M + 1, \dots, N - 1\}$, pues éstos son los valores requeridos para calcular la matriz \mathbf{P} . Dado que estos coeficientes son reales, éstos se pueden obtener a partir del siguiente cálculo:

$$\begin{aligned} \alpha_k = \text{Re}\{\alpha_k\} &\stackrel{(a)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{Re} \left\{ \frac{e^{j\omega(N+k)}}{N_U(e^{j\omega})} \right\} d\omega \\ &\stackrel{(b)}{=} \frac{1}{\pi} \text{Re} \left\{ \int_0^{\pi} \frac{e^{j\omega(N+k)}}{N_U(e^{j\omega})} d\omega \right\} \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

donde (a) es por la definición de los coeficientes de la serie de Laurent, (b) es debido a que el integrando es una función par.

Entonces, por (5.4.1) los coeficientes se calculan en MATLAB por integración trapezoidal según

$$\alpha_k \approx \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^{\frac{\pi}{\Delta}} \text{Re} \left\{ \frac{e^{ji\Delta(N+k)}}{N_U(e^{ji\Delta})} \right\} \Delta, \quad (5.4.2)$$

donde se ha elegido el paso de integración $\Delta = \frac{\pi}{50000}$, con el cual se considera que es suficiente para tener aproximaciones de α_k hasta las primeras 4 cifras significativas, sin incurrir en un cálculo computacional más exigente. Cabe destacar que este cálculo limita notoriamente el desempeño computacional de este nuevo método, en comparación al método tradicional que no necesita conocer estos coeficientes.

- Para estudiar estadísticamente el nuevo estimador causal y su relación con el estimador tradicional, se hace un análisis de Monte Carlo [63] realizando 500 experimentos con secuencia de entrada ruido blanco gaussiano $\{u_t\}$ fija, de varianza unitaria.

A continuación se presentan simulaciones para verificar las propiedades del nuevo estimador obtenido.

5.4.2. Modelo FIR

Se considera el siguiente sistema FIR de tercer orden

$$G_0(q) = \frac{0.7q^2 + 0.9q - 0.5}{q^3}. \quad (5.4.3)$$

Excitando este sistema con ruido blanco de media cero y varianza unitaria, los estimadores entregarán valores cercanos a 0.7, 0.9 y -0.5 para $t = 1, 2$ y 3 respectivamente. Para tener una idea de los resultados obtenidos con el estimador causal de la respuesta a impulso, se muestra en la Figura 5.1 una realización del experimento con varianza de ruido en la salida $\sigma^2 = 0.1$, y las estimaciones correspondientes.

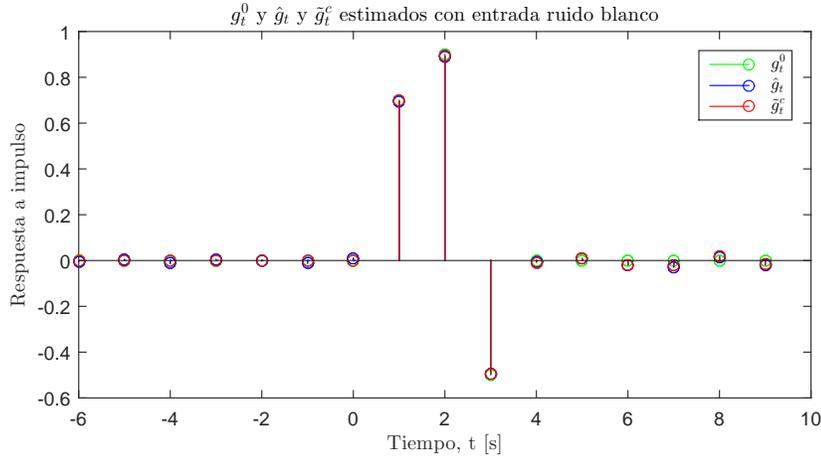


Figura 5.1: Respuesta a impulso verdadera (verde), estimada por ETFE tradicional (azul), y la estimada por ETFE causal (rojo), para sistema FIR con $N = 1000$.

Como se observa en la Figura 5.1, ambos métodos obtienen buenas estimaciones de los primeros tres valores no nulos de la respuesta a impulso. Por supuesto, el estimador causal entrega ceros para tiempos negativos.

Se propone realizar 500 experimentos con secuencia de entrada ruido blanco $\{u_t\}$ fija, de varianza unitaria. Fijando la varianza de ruido $\sigma^2 = 0.1$, con $N = 1000$ y $M = 100$, se obtiene empíricamente las siguientes matrices de covarianza de cada estimador para los tres primeros valores de la respuesta a impulso:

$$\text{cov}(\hat{\mathbf{g}}) = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.1437 & -0.0008 & -0.0155 \\ -0.0008 & 0.1471 & 0.0001 \\ -0.0155 & 0.0001 & 0.1483 \end{bmatrix}, \quad \text{cov}(\tilde{\mathbf{g}}_c) = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.1167 & 0.0024 & -0.0158 \\ 0.0024 & 0.1239 & 0.0007 \\ -0.0158 & 0.0007 & 0.1291 \end{bmatrix}.$$

Determinando los valores propios de la matriz $\text{cov}(\hat{\mathbf{g}}) - \text{cov}(\tilde{\mathbf{g}}_c)$, los cuales son $\lambda = \{0.1903 \times 10^{-4}, 0.2141 \times 10^{-4}, 0.2891 \times 10^{-4}\}$, se comprueba que todos los autovalores obtenidos son no negativos, y por ende para este ejemplo se cumple $\text{cov}(\hat{\mathbf{g}}) \geq \text{cov}(\tilde{\mathbf{g}}_c)$.

Por otra parte, se puede notar que las varianzas de cada valor estimado, dados por la diagonal de cada matriz de covarianza, son estrictamente menores para la estimación causal $\tilde{\mathbf{g}}_c$ para los tres valores estimados de la respuesta a impulso. Esto en concordancia con la propiedad 2 del Apéndice A.4.2.

Como una medida de varianza, también se puede analizar la traza de la matriz de covarianza $\text{tr}\{\text{cov}(\hat{\mathbf{g}})\}$ donde $\text{tr}\{\cdot\}$ corresponde a la traza de una matriz. Para las estimaciones presentadas, los

resultados son:

$$\text{tr}\{\text{cov}(\hat{\mathbf{g}})\} = 4.3904 \times 10^{-4} \quad , \quad \text{tr}\{\text{cov}(\tilde{\mathbf{g}}_c)\} = 3.6970 \times 10^{-4}. \quad (5.4.4)$$

Tal como se esperaba, la estimación ETFE causal tiene menor traza de matriz de covarianza que el método ETFE tradicional. La reducción es de un 15.7 %.

5.4.3. Sistema de segundo orden

Se considera la función de transferencia continua irreducible² [64] con polos subamortiguados y ganancia unitaria a frecuencia continua:

$$G_0(s) = \frac{0.04s + 0.01}{s^2 + 0.02s + 0.01}.$$

Eligiendo un tiempo de muestreo de acuerdo al criterio del tiempo de levantamiento [44], el equivalente con retentor de orden cero de $G_0(s)$ es el sistema

$$G_0(q) = \frac{0.07(q - 0.684)}{q^2 - 1.948q + 0.9704}. \quad (5.4.5)$$

Al excitar el sistema con una secuencia de entrada ruido blanco Gaussiano de media cero y varianza 1, considerando un ruido blanco Gaussiano con $\sigma^2 = 0.05$ aditivo en la salida, los resultados para ETFE tradicional y causal en los dominios de tiempo y frecuencia se encuentran en la Figura 5.2.

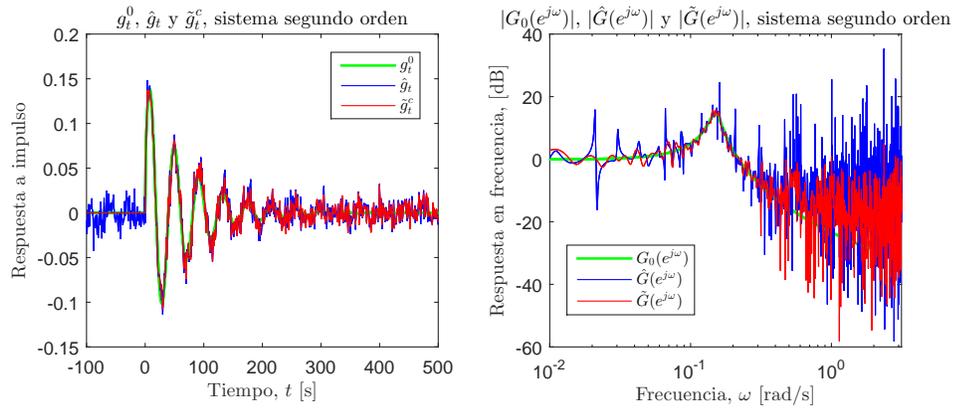


Figura 5.2: Izquierda: respuesta a impulso verdadera (verde), estimada con ETFE tradicional (azul) y ETFE causal (rojo) para sistema segundo orden con $\sigma^2 = 0.05$. Derecha: respuesta en frecuencia verdadera (verde), estimada con ETFE tradicional (azul) y ETFE causal(rojo).

Es claro que en frecuencia, el estimador por ETFE causal entrega valores más cercanos al real y con menos puntos erráticos. Además, en tiempo se observa un estimador causal con el nuevo método, a diferencia de la estimación obtenida con ETFE tradicional.

²Un sistema irreducible tiene matriz de Hankel igual a un factor de la matriz identidad. Esto implica que los modos asociados a cada autovalor del sistema tienen igual energía.

A continuación se procede a realizar 500 experimentos con el sistema $G_0(q)$. La secuencia de entrada $\{u_i\}$ es fija y se efectúan 500 realizaciones de secuencias de ruido blanco aditivo $\{v_i\}$ de varianza $\sigma^2 = 0.05$, con $N = 1000$ y considerando $M = 100$ datos no causales. Se grafican las varianzas empíricas coeficiente por coeficiente de cada estimador, obteniéndose el resultado de la Figura 5.3.

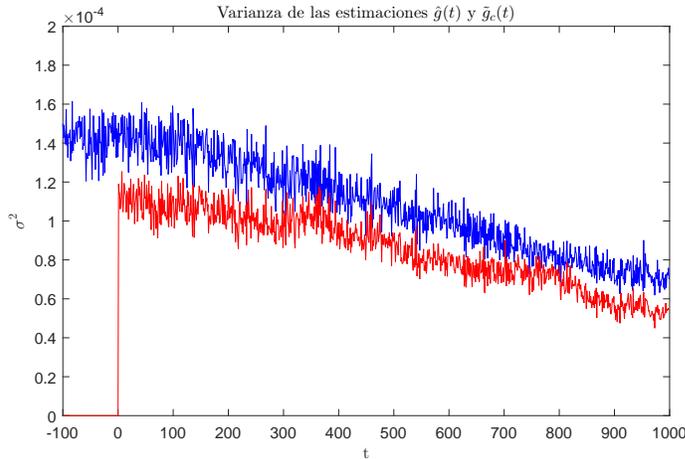


Figura 5.3: Varianzas empíricas de $\hat{g}(t)$ (azul), y el estimador causal $\tilde{g}_c(t)$ (rojo) para sistema de segundo orden, $\sigma^2 = 0.05$.

Como se ve en la Figura 5.3, el estimador causal presenta menor varianza coeficiente por coeficiente al realizar 500 experimentos. La traza de las matrices de covarianza asociadas a cada estimador se muestran a continuación.

$$\text{tr}\{\text{cov}(\hat{\mathbf{g}})\} = 0.0918 \quad , \quad \text{tr}\{\text{cov}(\tilde{\mathbf{g}}_c)\} = 0.0789.$$

Es decir, se logra una reducción de un 14.05 % de la traza de la matriz de covarianza al forzar causalidad en el estimador.

Si bien no se muestra gráficamente que la matriz de covarianza del estimador causal es menor o igual a la matriz de covarianza del estimador tradicional, se resalta una consecuencia directa de esto, dado que si se tiene una matriz semidefinida positiva, entonces todos los elementos de la diagonal son mayores o iguales que cero [51].

Al aumentar la varianza del ruido de salida a $\sigma^2 = 0.1$, se puede notar en la Figura 5.4 que la tendencia se mantiene, con obviamente mayor varianza en cada estimación. Es fácil notar que las curvas mostradas en las Figuras 5.3 y 5.4 son esencialmente iguales en forma, sólo diferenciándose por un escalamiento en 2, que corresponde al cambio de la varianza del ruido. Es de esperar entonces, que la reducción porcentual en traza de matriz de covarianza sea similar en ambos casos.

Las trazas de las matrices de covarianza asociadas a cada estimador son

$$\text{tr}\{\text{cov}(\hat{\mathbf{g}})\} = 0.1836 \quad , \quad \text{tr}\{\text{cov}(\tilde{\mathbf{g}}_c)\} = 0.1579,$$

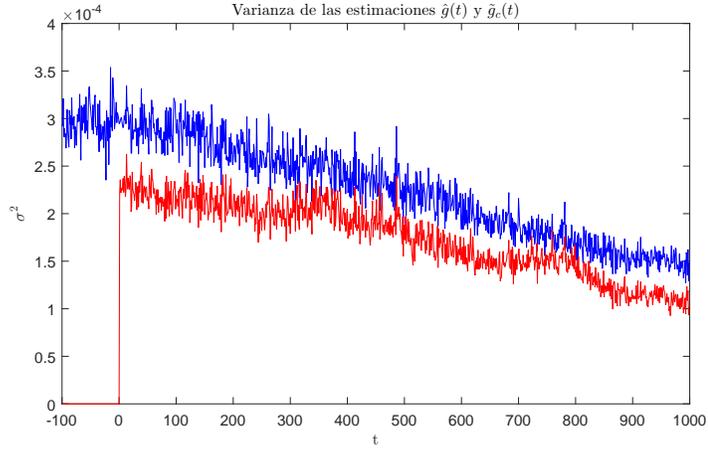


Figura 5.4: Varianzas empíricas de $\hat{g}(t)$ (azul), y el estimador causal $\tilde{g}_c(t)$ (rojo) para sistema de segundo orden, $\sigma^2 = 0.1$.

lo que corresponde a una reducción de un 14 %, es decir, no se logra apreciar un cambio de eficiencia del estimador causal frente a un cambio de $\sigma_2 = 0.05$ a $\sigma_2 = 0.1$ de la varianza del ruido blanco sumado a la salida. Cabe destacar que el estimador causal $\tilde{g}_c(t)$ tiene varianza cero para tiempo negativo, dado que la estimación de estos valores entrega cero determinísticamente por causalidad.

5.4.4. Sistema de tercer orden

Para seguir analizando el estimador, se propone un sistema continuo irreducible [64] de tercer orden con dos polos subamortiguados y un polo simple:

$$G_0(s) = \frac{0.12(s^2 + 0.001667)}{(s + 0.04)(s^2 + 0.02s + 0.0025)}.$$

Al igual que el caso anterior, se elige un tiempo de muestreo de acuerdo al criterio del tiempo de levantamiento. El equivalente con retenedor de orden cero de $G(s)$ es el sistema

$$G_0(q) = \frac{0.27811(q^2 - 1.99q + 1)}{(q - 0.9048)(q^2 - 1.936q + 0.9512)}. \quad (5.4.6)$$

Con varianza $\sigma^2 = 0.05$, los resultados en varianza son los provistos en la Figura 5.5. Las trazas de las matrices de covarianza de estas simulaciones son

$$\text{tr}\{\text{cov}(\hat{\mathbf{g}})\} = 0.0916 \quad , \quad \text{tr}\{\text{cov}(\tilde{\mathbf{g}}_c)\} = 0.0788,$$

lo que corresponde a una reducción de 13.97 %.

Con varianza $\sigma^2 = 0.1$, se obtienen los resultados mostrados en la Figura 5.6. Nuevamente, se observa una reducción en la traza de la matriz de covarianza:

$$\text{tr}\{\text{cov}(\hat{\mathbf{g}})\} = 0.1848 \quad , \quad \text{tr}\{\text{cov}(\tilde{\mathbf{g}}_c)\} = 0.1579,$$

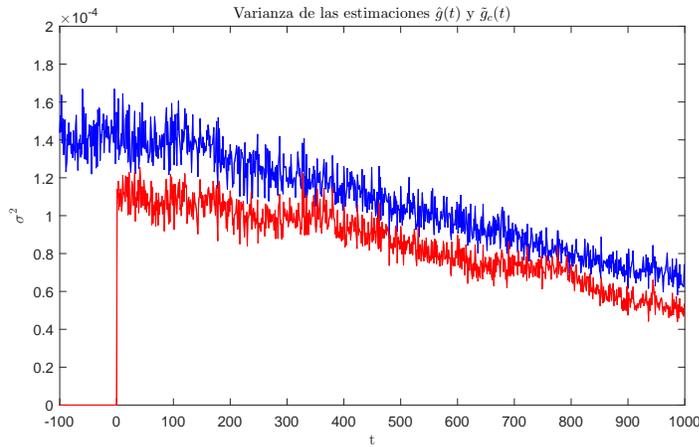


Figura 5.5: Varianzas empíricas de $\hat{g}(t)$ (azul), y el estimador causal $\tilde{g}_c(t)$ (rojo) para sistema de tercer orden, $\sigma^2 = 0.05$.

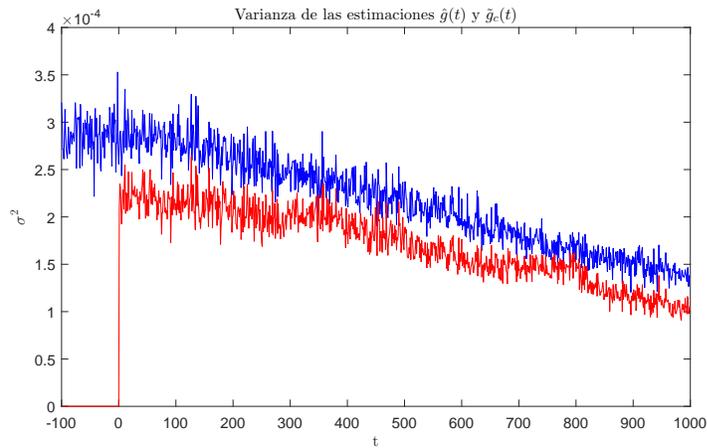


Figura 5.6: Varianzas empíricas de $\hat{g}(t)$ (azul), y el estimador causal $\tilde{g}_c(t)$ (rojo) para sistema de tercer orden, $\sigma^2 = 0.1$.

lo que equivale a una mejora de un 14.56%. Los resultados son similares que los casos anteriormente presentados. Pese a que se han escogido casos particulares, es razonable afirmar que la teoría desarrollada se aplica con éxito en los ejemplos considerados.

5.4.5. Sobre la elección de M

Finalmente, se concluye esta sección analizando los resultados para diferentes valores de la cantidad de datos no causales M .

Es natural pensar que al forzar una mayor cantidad de datos no causales a cero, incorporando

además la información relacionada con las estimaciones no causales, se esperaría obtener un mejor resultado en la varianza de cada coeficiente de la respuesta a impulso estimada, por el Teorema 5.3.4. Esto se comprobará en simulación.

Se considera el sistema dado por (3.2.1), y la planta (5.4.5), con señal de entrada ruido blanco de varianza 1, y varianza de ruido de salida $\sigma^2 = 0.1$. Se determinan los coeficientes necesarios de la serie de Laurent de la función racional $z^N(N_U(z))^{-1}$ para $M = 100$, y la extensión de esta secuencia para $M = 400$, para posteriormente hacer 500 simulaciones de Monte Carlo con el objetivo de estimar la respuesta a impulso, y las varianzas empíricas de cada coeficiente de la respuesta. Las varianzas obtenidas se muestran en la Figura 5.7.

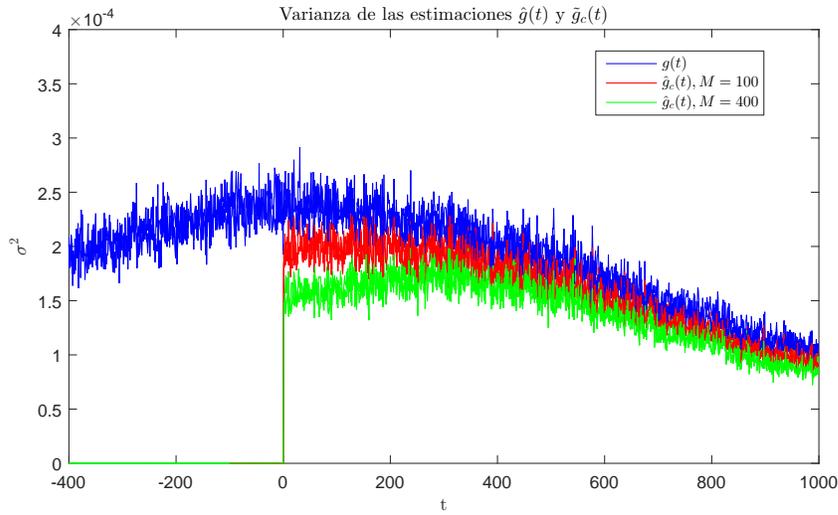


Figura 5.7: Varianzas empíricas de $\hat{g}(t)$ (azul), y el estimador causal $\tilde{g}_c(t)$ con $M = 100$ (rojo) y $M = 400$ (verde).

Las trazas de las matrices de covarianza para cada conjunto de estimaciones desde $t = 0$ hasta $t = 1000$, son las siguientes:

$$\text{tr}\{\text{cov}(\hat{\mathbf{g}})\} = 0.1801 \quad , \quad \text{tr}\{\text{cov}(\tilde{\mathbf{g}}_{c,M=100})\} = 0.1592 \quad , \quad \text{tr}\{\text{cov}(\tilde{\mathbf{g}}_{c,M=400})\} = 0.1395. \quad (5.4.7)$$

Nótese que con $M = 400$ la ETFE causal disminuye la traza de la matriz de covarianza en un 22.5 %, lo cual se considera una disminución importante para muchas aplicaciones prácticas. En concordancia con el Teorema 5.3.4, las varianzas para el caso $M = 400$ son menores o iguales coeficiente por coeficiente, en comparación con $M = 100$.

Observación 5.4.1. Por la Figura 5.7 es posible pensar que las varianzas coeficiente por coeficiente se pueden reducir sin limitación. Lamentablemente, el valor M no puede superar N , debido a que la matriz \mathbf{C}_{11} , de tamaño $M \times M$, proveniente de la factorización de Cholesky de \mathbf{P} , es de rango a lo sumo N pues éste es el rango máximo de \mathbf{P} . Dado que se necesita que \mathbf{C}_{11} tenga inversa, M no puede exceder el valor N para que la ETFE causal pueda calcularse.

5.5. Conclusiones

En este capítulo se ha formulado un estimador ETFE que entrega estimaciones causales. Se ha demostrado que, además de entregar una respuesta a impulso causal, el estimador obtenido es el estimador lineal asintóticamente no sesgado de varianza mínima dentro de un amplio conjunto de estimadores, dados los datos de entrada y salida. Esto es un gran aporte y corresponde plenamente con los objetivos propuestos en este trabajo. Además de encontrar un estimador causal, éste sin lugar a dudas mejora las propiedades estadísticas del estimador tradicional, en porcentajes que varían desde 10 % hasta 25 % aproximadamente.

Se ha estudiado además el efecto del parámetro M , que corresponde a la cantidad de datos no causales. Éste sigue la intuición en cuanto a que a medida que se aumenta M , la cantidad de datos forzados a cero, se incorpora más información a la estimación y por ende se reduce la varianza, tal como se demostró en el Teorema 5.3.4.

Por supuesto, una clara desventaja del método obtenido es la complejidad computacional en comparación al método tradicional, ya que el cálculo de cerca de $2N$ coeficientes de la serie de Laurent de una función racional de orden N no es sencillo computacionalmente, especialmente para valores grandes de N . Sin embargo, con una programación optimizada de estos coeficientes a partir de integración trapezoidal, el método es posible de realizar en la práctica y se ha mostrado su efectividad en simulación.

EXTENSIONES AL PROBLEMA DE CAUSALIDAD

6.1. Introducción

En este capítulo se presentan las principales extensiones de los resultados de los Capítulos 3 y 5.

Se introduce, como una primera forma de extender los resultados anteriores, la inclusión de condiciones iniciales en el sistema. Esto es de bastante interés, pues es normal que exista una componente de la salida producida por estímulos anteriores al momento de medir. Dicho esto, la primera sección versa sobre cómo incorporar la condición de causalidad en estos casos.

Es común estimar sistemas perturbaciones más generales que (3.2.1). El ruido puede ser coloreado, con lo cual se puede reescribir la relación entre ruido y salida a través de una función de transferencia, la cual se denotará $H_0(q)$. En la segunda sección de este capítulo, se aborda el problema de estimar la respuesta a impulso causal por ETFE considerando una estructura general, extendiendo así el resultado obtenido para modelos OE del Capítulo 5.

Además de lo anterior, se estudia en profundidad la corrección natural del estimador ETFE, la cual consiste en una mejora en la estimación de las densidades espectrales de potencia descritas en el Capítulo 2 a través del enventanado. Anteriormente se han determinado las densidades espectrales de potencia a partir de la transformada de Fourier discreta de las funciones de covarianza $R_{yu}(\tau)$ y $R_u(\tau)$. Las estimaciones de las funciones de covarianza por (2.2.3) y (2.2.4) son imprecisas para valores grandes de $|\tau|$ y por ende, es recomendable ponderar menos estos valores, en comparación con los valores centrales de la función de covarianza. Así surgen las ventanas de ponderación, las cuales son el fundamento esencial de la teoría del estimador ETFE suavizado.

Expresando de forma conveniente el estimador de la respuesta a impulso para el estimador suavizado, se aplican los mismos conceptos vistos en el Capítulo 5 para forzar causalidad y mejoras en covarianza. Con este resultado se amplían las aplicaciones del nuevo método, y se abarcan las posibilidades adicionales presentadas en el método ETFE suavizado, al aumentar el tamaño de la ventana sin aumentar mucho la varianza.

6.2. ETFE considerando condiciones iniciales

En la presente sección se analiza la construcción del estimador ETFE causal tomando en consideración los efectos de las condiciones iniciales, producidas por estímulos anteriores en el sistema

por identificar.

Se considera la estructura output error

$$y_t = \sum_{k=0}^{\infty} g_k^0 u_{t-k} + v_t, \quad (6.2.1)$$

donde g_k^0 corresponde a la respuesta a impulso verdadera del sistema $G_0(q)$. A diferencia de (3.2.2), (6.2.1) toma en cuenta que los valores de u_t son en general distintos de cero para $t < 0$. Entonces, tomando la transformada de Fourier en tiempo discreto de las primeras N muestras, se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N y_t e^{-j\omega t} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N \sum_{k=0}^{\infty} g_k^0 u_{t-k} e^{-j\omega t} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N v_t e^{-j\omega t}, \quad (6.2.2)$$

lo cual se puede expresar como

$$\begin{aligned} Y_N(e^{j\omega}) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N \sum_{k=0}^{\infty} g_k^0 u_{t-k} e^{-j\omega t} + V_N(e^{j\omega}) \\ &\stackrel{(t-k=\tau)}{=} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\tau=1-k}^{N-k} g_k^0 u_{\tau} e^{-j\omega(k+\tau)} + V_N(e^{j\omega}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\tau=1}^N g_k^0 u_{\tau} e^{-j\omega(k+\tau)} + \sum_{k=0}^{\infty} g_k^0 e^{-j\omega k} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\tau=1-k}^{N-k} u_{\tau} e^{-j\omega \tau} - U_N(e^{j\omega}) \right) + V_N(e^{j\omega}), \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

donde

$$U_N(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N u_t e^{-j\omega t} \quad V_N(e^{j\omega}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N v_t e^{-j\omega t}.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\tau=1-k}^{N-k} u_{\tau} e^{-j\omega \tau} - U_N(e^{j\omega}) \right| &\leq \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\tau=1-k}^0 u_{\tau} e^{-j\omega \tau} \right| + \left| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\tau=N+1-k}^N u_{\tau} e^{-j\omega \tau} \right| \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{N}} k \max_{\tau \in \{1-k, \dots, N-k\}} |u_{\tau}| \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{N}} k \max_{\tau \in \mathbb{Z}} |u_{\tau}|. \end{aligned}$$

Entonces, se escribe (6.2.3) como

$$Y_N(e^{j\omega}) = G_0(e^{j\omega}) U_N(e^{j\omega}) + M(e^{j\omega}) + V_N(e^{j\omega})$$

donde

$$\begin{aligned} G_0(e^{j\omega}) &= \sum_{k=0}^{\infty} g_k^0 e^{-j\omega k} \\ M(e^{j\omega}) &= \sum_{k=0}^{\infty} g_k^0 e^{-j\omega k} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\tau=1-k}^{N-k} u_{\tau} e^{-j\omega \tau} - U_N(e^{j\omega}) \right). \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

Al igual que para el caso de condiciones iniciales cero, si se satisface que u_t es acotada y la suma $\sum_{k=0}^{N-1} k|g_k^0|$ converge para $N \rightarrow \infty$, entonces

$$\begin{aligned} |M(e^{j\omega})| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} g_k^0 e^{-j\omega k} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\tau=1-k}^{N-k} u_\tau e^{-j\omega\tau} - U_N(e^{j\omega}) \right) \right| \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^{\infty} |g_k^0| k \max_{\tau \in \mathbb{Z}} |u_\tau| \\ &= \frac{2}{\sqrt{N}} \max_{\tau \in \mathbb{Z}} |u_\tau| \sum_{k=0}^{\infty} k |g_k^0| \\ &=: \frac{C_2}{\sqrt{N}}. \end{aligned}$$

Entonces, al igual que para el análisis hecho en la sección 3.2, si $C_2 < \infty$ el término $M(e^{j\omega})$ tiende a cero para todo ω si $N \rightarrow \infty$.

Por lo tanto, el estimador ETFE para este caso se reduce a

$$\hat{G}(e^{j\omega}) = G_0(e^{j\omega}) + \frac{M(e^{j\omega}) + V_N(e^{j\omega})}{U_N(e^{j\omega})}. \quad (6.2.5)$$

Así, el tratamiento es idéntico que para el caso con condiciones iniciales cero, ahora tomando en consideración el término $M(e^{j\omega})$ que agrupa el error en la convolución producto de la finitud de la transformada ocupada y el efecto de las condiciones iniciales distintas de cero. Este término provoca sesgo, pero bajo condiciones débiles converge a cero cuando la cantidad de datos N tiende a infinito. Esto tiene sentido, pues la condición requerida de estabilidad $\sum_{k=0}^{\infty} k|g_k^0| < \infty$ fuerza que el efecto de las condiciones iniciales en la respuesta del sistema desaparezca a medida que N tiende a infinito, manteniéndose sólo la respuesta estacionaria. Nótese además que para esta extensión, se está estimando la respuesta a impulso en su completitud (desde 0 hasta infinito), lo cual no es posible si se tiene condiciones iniciales cero.

Por lo tanto, con el resultado anterior se establecen exactamente los mismos teoremas desarrollados en el Capítulo 5, incluso con la misma construcción de la matriz de covarianza, la cual únicamente depende del término $e_t = \sum_{k=1}^N v_k \alpha_{t-k}$ en ambos casos. Entonces, se puede plantear el mismo estimador causal sin saber si hay condiciones iniciales distintas de cero o no, y obtener mejores resultados asintóticos en covarianza que el estimador tradicional.

6.3. ETFE considerando una estructura general de modelos

Hasta el momento, este trabajo solamente ha considerado modelos tipo output error. Si el ruido de salida es coloreado, o bien hay perturbaciones en la entrada, el efecto de éste puede expresarse como un ruido blanco filtrado por un filtro que se denominará $H_0(q)$. A continuación se determina la respuesta a impulso estimada para este caso general, y luego cómo se obtiene un estimador causal en este nuevo escenario.

6.3.1. Deducción de la respuesta a impulso y análisis de media y covarianza

Se estudia el siguiente sistema de tiempo discreto, lineal e invariante en el tiempo con condiciones iniciales producto solamente de la entrada

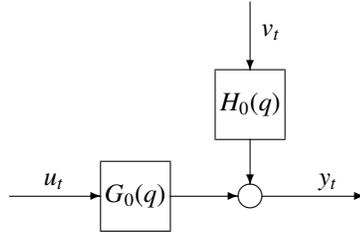


Figura 6.1: Diagrama de bloques de estructura general.

$$\begin{aligned} y_t &= G_0(q)u_t + H_0(q)v_t \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} g_k^0 u_{t-k} + \sum_{k=0}^{t-1} h_k^0 v_{t-k}, \quad t = 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

donde $\{v_t\}$ es un proceso de ruido blanco de media cero y varianza σ^2 . Se denota $\tilde{v}_t := \sum_{k=0}^{t-1} h_k^0 v_{t-k}$, y su transformada de Fourier considerando los primeros N términos como $\tilde{V}_N(e^{j\omega})$. De forma análoga a lo obtenido en la Sección 6.2, el estimador ETFE se expresa como

$$\begin{aligned} G(\hat{e}^{j\omega}) &= \frac{Y_N(e^{j\omega})}{U_N(e^{j\omega})} = \frac{G_0(e^{j\omega})U_N(e^{j\omega}) + M(e^{j\omega}) + \tilde{V}_N(e^{j\omega})}{U_N(e^{j\omega})} \\ &= G_0(e^{j\omega}) + \frac{M(e^{j\omega})}{U_N(e^{j\omega})} + \frac{\tilde{V}_N(e^{j\omega})}{U_N(e^{j\omega})}, \end{aligned}$$

donde $G_0(e^{j\omega})$, $U_N(e^{j\omega})$ y $M(e^{j\omega})$ se encuentran definidos en (6.2.4). Entonces, se tiene la respuesta a impulso estimada por ETFE para una estructura general

$$\begin{aligned} \hat{G}(e^{j\omega}) &= \sum_{t=-\infty}^{\infty} \left(g_t^0 + \sum_{k=1}^N (m_k + \tilde{v}_k) \alpha_{t-k} \right) e^{-j\omega t} \\ &= \sum_{t=-\infty}^{\infty} \left(g_t^0 + \sum_{k=1}^N m_k \alpha_{t-k} + \sum_{k=1}^N \sum_{l=0}^{k-1} h_l^0 v_{k-l} \alpha_{t-k} \right) e^{-j\omega t} \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

$$= \sum_{t=-\infty}^{\infty} \hat{g}_t e^{-j\omega t}. \quad (6.3.3)$$

En (6.3.2) se ha obtenido explícitamente los coeficientes de la respuesta a impulso por ETFE dada una estructura general de modelos. Nótese que si $h_k = \delta_k$, donde δ_k corresponde al delta de Kronecker para $k = 0$, la expresión (6.3.2) se reduce naturalmente a (3.2.21).

Al igual que el caso con ruido en la medición solamente, en la parte no causal del estimador sólo influyen los términos de α_t para $t < -1$. El análisis con respecto a este coeficiente es idéntico que el

caso estudiado anteriormente.

La media y la matriz de covarianza de este estimador para el caso general se determinan a continuación:

- Esperanza: La media del estimador \hat{g}_t es

$$\begin{aligned} E\{\hat{g}_t\} &= E\left\{g_t^0 + \sum_{k=1}^N m_k \alpha_{t-k} + \sum_{k=1}^N \sum_{l=0}^{k-1} h_l^0 v_{k-l} \alpha_{t-k}\right\} \\ &= g_t^0 + \sum_{k=1}^N m_k \alpha_{t-k} + \sum_{k=1}^N \sum_{l=0}^{k-1} h_l^0 E\{v_{k-l}\} \alpha_{t-k} \\ &= g_t^0 + \sum_{k=1}^N m_k \alpha_{t-k}, \end{aligned} \quad (6.3.4)$$

ya que v_k tiene media cero.

- Matriz de covarianza: de forma análoga al primer caso estudiado, se sabe que el error de estimación está dado por

$$e_t = \hat{g}_t - E\{\hat{g}_t\} = \sum_{k=1}^N \sum_{l=0}^{k-1} h_l^0 v_{k-l} \alpha_{t-k}. \quad (6.3.5)$$

El error se puede escribir en forma matricial como

$$\mathbf{e} = \mathbf{T}(\beta) \tilde{\mathbf{v}}, \quad (6.3.6)$$

donde \mathbf{e} y $\mathbf{T}(\beta)$ se encuentran definidos en (3.3.4), y el vector $\tilde{\mathbf{v}}$, con elementos $\tilde{v}_k := \sum_{l=0}^{k-1} h_l^0 v_{k-l}$, $k = 1, \dots, N$, se puede expresar como

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{H} \mathbf{v}, \quad (6.3.7)$$

donde \mathbf{v} está definido en (3.3.4), y \mathbf{H} es una matriz de Toeplitz de dimensiones $N \times N$ cuyos elementos son

$$[\mathbf{H}]_{i,k} = \begin{cases} h_{i-k}^0, & i \geq k \\ 0, & i < k \end{cases} \quad i = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, N. \quad (6.3.8)$$

Así, la matriz de covarianza $\text{cov}(\mathbf{e})$ se obtiene directamente como

$$\text{cov}(\mathbf{e}) = E\{\mathbf{T}(\beta) \mathbf{H} \mathbf{v} \mathbf{v}^T \mathbf{H}^T \mathbf{T}(\beta)^T\} = \sigma^2 \mathbf{T}(\beta) \mathbf{H} \mathbf{H}^T \mathbf{T}(\beta)^T. \quad (6.3.9)$$

Nótese que si se quisiera conocer explícitamente y exactamente $\text{cov}(\mathbf{e})$, además de conocer la secuencia de entrada es necesario conocer los primeros N coeficientes de la respuesta a impulso del filtro $H(e^{j\omega})$. Esto sin lugar a dudas complica la obtención de la matriz de covarianza y por ende, un estimador causal de varianza mínima. La idea para implementar el estimador es en primer lugar estimar el filtro del ruido, y luego truncar la respuesta a impulso de éste para obtener una aproximación

de la matriz de covarianza $\text{cov}(\mathbf{e})$. Ya estimada esta matriz, el problema de causalidad se resuelve de forma estándar con la técnica estudiada, obteniéndose un estimador causal y asintóticamente no sesgado, con mejoras en varianza dependiendo de qué tan buena es la estimación de la respuesta a impulso del filtro de ruido $H_0(q)$. Se estudia un ejemplo de este método en la subsección siguiente.

6.3.2. Implementación y simulación

Como se ha explicado en la Subsección 6.3.1, la formulación del estimador causal para ETFE en estructuras generales es idéntica que para el caso output error, y por ende no se replicará. La única diferencia se encuentra en el cálculo de la matriz de covarianza para la determinación de la matriz de factorización de Cholesky \mathbf{C} , para la cual debe estimarse la respuesta a impulso del filtro $H_0(q)$.

En la literatura existen muchas técnicas para estimar $H_0(q)$. En este trabajo se propondrá un método simple basado en el estimador ETFE. En [4] se propone una técnica para estimar el espectro del ruido basada en optimización de costos cuadráticos asociados a residuos del sistema. En cambio, en [2] se trabaja directamente con el residuo $\hat{v}_t := y_t - \hat{G}(q)u_t$, con la cual se puede obtener fácilmente el espectro a partir de un periodograma de esta secuencia. Se introduce en esta sección una técnica no necesariamente óptima en cuanto a obtener el mejor estimador de la función de covarianza \hat{v}_t , de pero de fácil implementación y de directa relación con el estimador ETFE.

Dado un experimento con N datos de entrada y N datos de salida, es posible construir el estimador ETFE tal como ha sido presentado en los Capítulos 2 y 3. Obtenida la estimación de la respuesta en frecuencia $\hat{G}(e^{j\omega})$ y su respuesta a impulso \hat{g}_t , si $\hat{G}(e^{j\omega}) \approx G_0(e^{j\omega})$, se puede estimar el ruido filtrado a partir de la secuencia de residuos como

$$\begin{aligned}\hat{v}_t &= y_t - \hat{G}(q)u_t \\ &= y_t - \hat{g}_t * u_t.\end{aligned}$$

Ya determinado \hat{v}_t , se obtiene una estimación de la función de covarianza

$$R_{\hat{v}}^N(k) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \hat{v}_t \hat{v}_{t-k}. \quad (6.3.10)$$

Finalmente, el objetivo se reduce a encontrar la factorización espectral del espectro de $\{\hat{v}_t\}$, que se denota $\hat{\phi}_{\hat{v}}(z)$ y se calcula como la transformada Zeta bilateral de $R_{\hat{v}}^N(k)$. La factorización espectral entrega la función de transferencia $\sigma \hat{H}(z)$ tal que $\hat{\phi}_{\hat{v}}(z) = \sigma^2 \hat{H}(z) \hat{H}(z)^{\sim}$, donde \sim denota el operador hermitiano¹.

Este cálculo e implementación en software puede realizarse gracias al teorema de Fejér-Riesz [65]. Obtenido $\hat{H}(z)$, la aproximación de la respuesta a impulso del filtro del ruido \hat{h}_t , se calcula mediante transformada Zeta inversa.

Ya descrito lo anterior, se procede a estudiar un ejemplo. Se considera un sistema descrito como modelo ARX

$$y_t = \frac{0.07(q - 0.684)}{q^2 - 1.948q + 0.9704} u_t + \frac{0.1}{q^2 - 1.948q + 0.9704} v_t, \quad (6.3.11)$$

¹El hermitiano de una función de transferencia $H(z)$ se define como $\hat{H}(z)^{\sim} := H(z^{-1})^T$.

donde $\{v_t\}$ es ruido blanco de media cero y varianza $\sigma^2 = 0.01$. Haciendo 500 simulaciones de Monte Carlo, en la Figura 6.2 se grafican las varianzas coeficiente por coeficiente del estimador ETFE tradicional \hat{g}_t , luego las del estimador ETFE causal \tilde{g}_t^c suponiendo $H(q) = 1$, y el estimador ETFE causal \tilde{g}_t^c con h_t estimado a partir del método descrito.

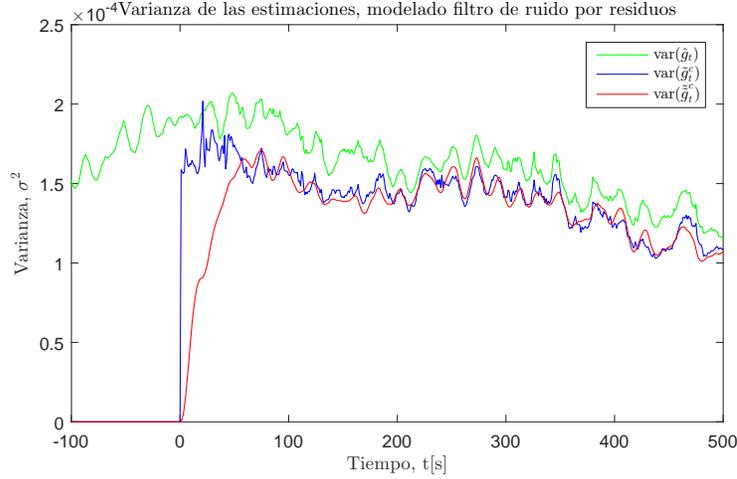


Figura 6.2: Varianzas empíricas de \hat{g}_t (azul), del estimador causal suponiendo ruido blanco \tilde{g}_t^c (rojo), y del estimador causal con ruido modelado \tilde{g}_t^c (verde) para una estructura ARX.

Las trazas de las matrices de covarianzas asociadas a cada estimador son los siguientes:

$$\text{tr}\{\text{cov}(\hat{\mathbf{g}})\} = 0.1358 \quad , \quad \text{tr}\{\text{cov}(\tilde{\mathbf{g}}_c)\} = 0.1235 \quad , \quad \text{tr}\{\text{cov}(\tilde{\tilde{\mathbf{g}}}_c)\} = 0.1193. \quad (6.3.12)$$

Se observa una reducción del 9.05 % en la traza de la matriz de covarianza al estimar g_t^0 a partir del estimador ETFE causal considerando el modelo del ruido, y una reducción de 3.4 % en relación con la estimación $\tilde{\mathbf{g}}_c$. Entonces, se puede concluir que bajo el modelado del filtro del ruido, no sólo se puede reducir la varianza del estimador ETFE tradicional, sino que el estimador construido presenta mejores propiedades que el estimador causal suponiendo ruido blanco no filtrado.

Observación 6.3.1. Durante esta simulación, se ha ocupado una estimación fija de $H_0(q)$, no variando ésta según las simulaciones de Monte Carlo. Esto no es correcto si se quisiera hacer una comprobación que el estimador de la respuesta a impulso dado por la estimación del filtro del ruido $H_0(q)$ es el estimador que asintóticamente presenta menor matriz de covarianza. Esta opción no es abarcada en esta tesis debido a la carga computacional que generaría determinar 1000 factorizaciones espectrales de un polinomio trigonométrico de 2001 términos. Más bien, la simulación comprueba que bajo una estimación simple del filtro del ruido blanco, es posible generar un estimador causal en donde cada coeficiente en promedio se desvía menos del valor medio, el cual se acerca asintóticamente a su valor verdadero para este estimador.

Aún así, otra posibilidad es truncar la estimación de \hat{h}_t a una cantidad mucho menor de términos para facilitar la carga computacional. Esto se haría con el propósito de mejorar los tiempos de cómputo.

Para terminar esta sección, en la Figura 6.3 se muestran las varianzas coeficiente a coeficiente, ahora conociéndose exactamente el modelo del ruido.

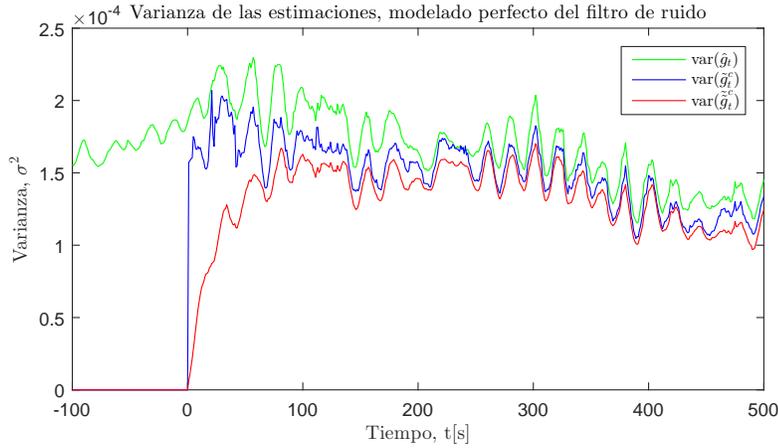


Figura 6.3: Varianzas empíricas de \hat{g}_t (azul), del estimador causal suponiendo ruido blanco \tilde{g}_t^c (rojo), y del estimador causal considerando modelo verdadero del ruido \tilde{g}_t^c (verde) para una estructura ARX.

Es fácil notar que la estimación causal tomando en consideración el ruido perfectamente modelado satisface que la varianza término a término es menor que aquella producida por la estimación tradicional por ETFE, y es también menor a considerar al ruido como si fuera blanco. En ambas figuras obtenidas, es claro que si bien las varianzas se reducen al aplicar ETFE causal considerando ruido blanco, el correcto modelado del ruido permite mejorar aún más en varianza las estimaciones.

6.4. Incorporación de ventanas en el estimador ETFE

Es bien sabido que ETFE entrega estimaciones pobres en varianza, en cuanto a que la matriz de covarianza de la respuesta a impulso y la respuesta en frecuencia no tienden a cero a medida que N tiende a infinito. Es decir, la ETFE es un estimador no consistente. De acuerdo a [2], una forma de mejorar la varianza en ETFE es suponer que los valores de la respuesta en frecuencia verdadera están relacionados entre sí. Esto se traduce en el supuesto razonable:

Suposición 6.4.1. *La respuesta en frecuencia $G_0(e^{j\omega})$ es una función suave en ω .*

Entonces, se puede proponer el estimador ETFE suavizado, introducido en el Capítulo 2:

$$\hat{G}(e^{j\omega}) = \frac{\hat{\Phi}_{yu}^N(\omega)}{\hat{\Phi}_u^N(\omega)} = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} W_{\gamma}(\xi - \omega) Y_N(e^{j\xi}) \overline{U}_N(e^{j\xi}) d\xi}{\int_{-\pi}^{\pi} W_{\gamma}(\xi - \omega) |U_N(e^{j\xi})|^2 d\xi}, \quad (6.4.1)$$

donde $W_{\gamma}(\xi)$ es una función de peso simétrica con respecto a $\xi = 0$ y γ es un parámetro de forma cuyo efecto se discutirá en las siguientes secciones. A continuación, se deduce el estimador ETFE en el dominio del tiempo, extendiendo los resultados obtenidos en el capítulo 3.

6.4.1. Dedución del estimador suavizado de la respuesta a impulso

Otra forma de expresar (6.4.1) es determinando estimaciones de los espectros $\hat{\Phi}_u^N(\omega)$ y $\hat{\Phi}_{yu}^N(\omega)$ vistos como la transformada de Fourier en tiempo discreto de la convolución escrita en la Ecuación (6.4.1), de la siguiente forma:

$$\hat{G}(e^{j\omega}) = \frac{\hat{\Phi}_{yu}^N(\omega)}{\hat{\Phi}_u^N(\omega)} = \frac{\sum_{k=-\delta_\gamma}^{\delta_\gamma} w_\gamma(k) \hat{R}_{yu}^N(k) e^{-j\omega k}}{\sum_{k=-\delta_\gamma}^{\delta_\gamma} w_\gamma(k) \hat{R}_u^N(k) e^{-j\omega k}}, \quad (6.4.2)$$

donde $w_\gamma(k)$ son los coeficientes de Fourier de la función $2\pi W_\gamma(\xi)$, los cuales se escogen iguales a cero para $|k| > \delta_\gamma$, con δ_γ constante elegida de acuerdo a la función suave $W_\gamma(\xi)$, que indica el tamaño de la ventana. Las funciones de covarianza $\hat{R}_u^N(k)$ y $\hat{R}_{yu}^N(k)$ están dadas por los coeficientes de Fourier de los periodogramas $|U_N(e^{j\omega})|^2$ y $Y_N(e^{j\omega})\bar{U}_N(e^{j\omega})$ respectivamente:

$$\hat{R}_u^N(k) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u_t u_{t-k}, \quad \hat{R}_{yu}^N(k) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y_t u_{t-k}. \quad (6.4.3)$$

Ahora considérese el sistema dado por (3.2.1). El estimador (6.4.1) se puede determinar explícitamente para el sistema anteriormente descrito, de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y_t &= G_0(q)u_t + v_t \\ Y_N(e^{j\xi}) &= G_0(e^{j\xi})U_N(e^{j\xi}) + V_N(e^{j\xi}) + M_N(e^{j\xi}), \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} Y_N(e^{j\xi})\bar{U}_N(e^{j\xi}) &= G_0(e^{j\xi})|U_N(e^{j\xi})|^2 + (V_N(e^{j\xi}) + M_N(e^{j\xi}))\bar{U}_N(e^{j\xi}) \\ &= G_0(e^{j\omega})|U_N(e^{j\xi})|^2 + (V_N(e^{j\xi}) + M_N(e^{j\xi}))\bar{U}_N(e^{j\xi}) + G_0(e^{j\xi})|U_N(e^{j\xi})|^2 - G_0(e^{j\omega})|U_N(e^{j\xi})|^2. \end{aligned}$$

Multiplicando por la función $W_\gamma(\xi - \omega)$ e integrando,

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi - \omega) Y_N(e^{j\xi}) \bar{U}_N(e^{j\xi}) d\xi &= G_0(e^{j\omega}) \int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi - \omega) |U_N(e^{j\xi})|^2 d\xi \\ &+ \int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi - \omega) (V_N(e^{j\xi}) + M_N(e^{j\xi})) \bar{U}_N(e^{j\xi}) d\xi + \int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi - \omega) (G_0(e^{j\xi}) - G_0(e^{j\omega})) |U_N(e^{j\xi})|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Dividiendo por el denominador de (6.4.1), se obtiene el estimador ETFE mejorado como

$$\hat{G}(e^{j\omega}) = G_0(e^{j\omega}) + \frac{\int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi - \omega) V_N(e^{j\xi}) \bar{U}_N(e^{j\xi}) d\xi}{\int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi - \omega) |U_N(e^{j\xi})|^2 d\xi} \quad (6.4.4)$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{\int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi - \omega) M_N(e^{j\xi}) \bar{U}_N(e^{j\xi}) d\xi}{\int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi - \omega) |U_N(e^{j\xi})|^2 d\xi} + \frac{\int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi - \omega) (G_0(e^{j\xi}) - G_0(e^{j\omega})) |U_N(e^{j\xi})|^2 d\xi}{\int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi - \omega) |U_N(e^{j\xi})|^2 d\xi} \\ &=: G_0(e^{j\omega}) + G^v(e^{j\omega}) + G^{bias}(e^{j\omega}), \end{aligned} \quad (6.4.5)$$

donde

$$G^v(e^{j\omega}) = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi - \omega) V_N(e^{j\xi}) \bar{U}_N(e^{j\xi}) d\xi}{\int_{-\pi}^{\pi} W_\gamma(\xi - \omega) |U_N(e^{j\xi})|^2 d\xi}$$

$$G^{bias}(e^{j\omega}) = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} W_{\gamma}(\xi - \omega) M_N(e^{j\xi}) \overline{U}_N(e^{j\xi}) d\xi}{\int_{-\pi}^{\pi} W_{\gamma}(\xi - \omega) |U_N(e^{j\xi})|^2 d\xi} + \frac{\int_{-\pi}^{\pi} W_{\gamma}(\xi - \omega) (G_0(e^{j\xi}) - G_0(e^{j\omega})) |U_N(e^{j\xi})|^2 d\xi}{\int_{-\pi}^{\pi} W_{\gamma}(\xi - \omega) |U_N(e^{j\xi})|^2 d\xi}.$$

Nótese que si $W_{\gamma}(\xi - \gamma) = \delta(\xi - \gamma)$, donde $\delta(\xi)$ corresponde al delta de Dirac en $\xi = 0$, se tiene $w_{\gamma}(k) = 1$ para todo k y no se realiza promediado alguno entre frecuencias. En este caso, la expresión (6.4.4) se reduce a (3.2.6). Esto es equivalente a considerar los datos $\{u_t\}$ e $\{y_t\}$ y calcular el estimador ETFE a partir del cociente de las transformadas de Fourier de las funciones de covarianza con $\delta_{\gamma} \rightarrow \infty$, como se ve a continuación:

$$\begin{aligned} \hat{G}(e^{j\omega}) &= \frac{\hat{\Phi}_{yu}^N(\omega)}{\hat{\Phi}_{uu}^N(\omega)} = \frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{R}_{yu}^N(k) e^{-j\omega k}}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{R}_{uu}^N(k) e^{-j\omega k}} \\ &= \frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y_t u_{t-k} e^{-j\omega k}}{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u_t u_{t-k} e^{-j\omega k}}. \end{aligned}$$

Simplificando el numerador, se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N y_t u_{t-k} e^{-j\omega k} &= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \sum_{l=-\infty}^{\infty} y_t u_l e^{j\omega(l-t)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N y_t e^{-j\omega t} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{l=1}^N u_l e^{j\omega l} \\ &= Y_N(e^{j\omega}) \overline{U}_N(e^{j\omega}). \end{aligned} \quad (6.4.6)$$

Trabajando el denominador de la misma forma, se obtiene que

$$\hat{G}(e^{j\omega}) = \frac{Y_N(e^{j\omega}) \overline{U}_N(e^{j\omega})}{|U_N(e^{j\omega})|^2} = \frac{Y_N(e^{j\omega})}{U_N(e^{j\omega})}, \quad (6.4.7)$$

que corresponde al estimador (3.2.6). Esta deducción es equivalente a la mostrada en el Capítulo 2, ahora bajo el punto de vista del suavizado de espectros.

Para obtener una expresión explícita de la respuesta a impulso de este estimador, se analizará el segundo sumando de la expresión al lado derecho de (6.4.4), denominado $G^v(e^{j\omega})$. Haciendo el análogo con (6.4.2), se puede expresar este término como

$$\begin{aligned} G^v(e^{j\omega}) &= \frac{\hat{\Phi}_{vu}^N(\omega)}{\hat{\Phi}_{uu}^N(\omega)} \\ &= \frac{\sum_{k=-\delta_{\gamma}}^{\delta_{\gamma}} w_{\gamma}(k) \hat{R}_{vu}^N(k) e^{-j\omega k}}{\sum_{k=-\delta_{\gamma}}^{\delta_{\gamma}} w_{\gamma}(k) \hat{R}_{uu}^N(k) e^{-j\omega k}} \\ &= \frac{\sum_{k=-\delta_{\gamma}}^{\delta_{\gamma}} w_{\gamma}(k) \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N v_t u_{t-k} e^{-j\omega k}}{\sum_{k=-\delta_{\gamma}}^{\delta_{\gamma}} w_{\gamma}(k) \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u_t u_{t-k} e^{-j\omega k}}. \end{aligned} \quad (6.4.8)$$

Haciendo el cambio de variable $e^{j\omega} = z$, se puede escribir (6.4.8) como

$$G^v(e^{j\omega})|_{e^{j\omega}=z} = \frac{\sum_{k=-\delta_{\gamma}}^{\delta_{\gamma}} w_{\gamma}(k) \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N v_t u_{t-k} z^{-k}}{\sum_{k=-\delta_{\gamma}}^{\delta_{\gamma}} w_{\gamma}(k) \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u_t u_{t-k} z^{-k}} = \sum_{k=-\delta_{\gamma}}^{\delta_{\gamma}} \tilde{v}_k z^{-k} \frac{z^{\delta_{\gamma}}}{\sum_{l=0}^{2\delta_{\gamma}} w_{\gamma}(\delta_{\gamma} - l) \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u_t u_{t+l-\delta_{\gamma}} z^l}$$

$$= \sum_{k=-\delta_\gamma}^{\delta_\gamma} \tilde{v}_k z^{-k} \frac{z^{\delta_\gamma}}{N_{\tilde{U}}(z)}, \quad (6.4.9)$$

donde $N_{\tilde{U}}(z) := \sum_{l=0}^{2\delta_\gamma} w_\gamma(\delta_\gamma - l) \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u_t u_{t+l-\delta_\gamma} z^l$. Se ha hecho el cambio de variable $k = \delta_\gamma - l$, y ordenado para obtener la función racional $z^{\delta_\gamma} (N_{\tilde{U}}(z))^{-1}$ expresada en potencias positivas de z . Además, se ha definido

$$\tilde{v}_k := w_\gamma(k) \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N v_t u_{t-k} = w_\gamma(k) \hat{R}_{vu}^N(k). \quad (6.4.10)$$

Entonces, se puede expresar la función racional $z^{\delta_\gamma} (N_{\tilde{U}}(z))^{-1}$ en términos de su transformada de Fourier en tiempo discreto con $e^{j\omega} = z$, de forma análoga a lo hecho en (3.2.19), como

$$\frac{z^{\delta_\gamma}}{N_{\tilde{U}}(z)} = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \beta_\tau z^{-\tau}. \quad (6.4.11)$$

Ahora, desarrollando (6.4.9),

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\delta_\gamma}^{\delta_\gamma} \tilde{v}_k z^{-k} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \beta_\tau z^{-\tau} &= \sum_{k=-\delta_\gamma}^{\delta_\gamma} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \tilde{v}_k \beta_\tau z^{-k-\tau} \\ &= \sum_{t=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\delta_\gamma}^{\delta_\gamma} \tilde{v}_k \beta_{t-k} z^{-t}, \end{aligned} \quad (6.4.12)$$

donde se ha hecho el cambio de variable $t = \tau + k$ para cambiar el orden de las sumatorias. Finalmente, si se define la secuencia $\{g_t^{bias}\}$ como la transformada inversa de Fourier de $G^{bias}(e^{j\omega})$, considerando $z = e^{j\omega}$ en (6.4.12) se obtiene la expresión exacta para la ETFE mejorada a través de ventanas como

$$\hat{G}(e^{j\omega}) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \left(g_t^0 + \sum_{k=-\delta_\gamma}^{\delta_\gamma} w_\gamma(k) \hat{R}_{vu}^N(k) \beta_{t-k} + g_t^{bias} \right) e^{-j\omega t} \quad (6.4.13)$$

$$= \sum_{t=-\infty}^{\infty} \hat{g}_t e^{j\omega t}. \quad (6.4.14)$$

Cabe destacar que la secuencia $\{g_t^{bias}\}$ es determinística con secuencia de entrada al sistema $\{u_t\}$ determinística. Esta secuencia es la que impone sesgo al estimador \hat{g}_t . En la práctica se elige $\gamma = \delta_\gamma$, es decir, el parámetro de forma de la ventana regula la cantidad de términos no nulos de ésta. Además de depender de $G_0(q)$ y la secuencia de entrada, su dependencia con el parámetro γ se ha estudiado de forma asintótica en [4]. En [4] se concluye que el estimador ETFE suavizado es asintóticamente no sesgado para $\gamma, N \rightarrow \infty$, lo cual es equivalente a considerar una ventana $W_\gamma(\xi)$ de ancho infinitesimal con área unitaria, es decir, un delta de Dirac, lo cual corresponde a una ventana rectangular en el dominio del tiempo con $N \rightarrow \infty$. Tal como se mostró en (6.4.7), esto conduce al estimador ETFE tradicional. Además, si se escoge correctamente el tamaño de la ventana γ en función de N tal que a medida que $\gamma, N \rightarrow \infty$ se tiene $\frac{\gamma}{N} \rightarrow 0$, [4] demostró que la ETFE suavizada es consistente. El valor de γ comúnmente debe elegirse de forma empírica. Sin embargo, existen expresiones asintóticas que determinan el valor óptimo de γ que minimiza el error cuadrático medio (MSE) [4].

6.4.2. Análisis de media y covarianza del estimador ETFE suavizado

Estudemos las propiedades de media y covarianza de este estimador en el dominio del tiempo:

- Media: Recordando que g_t^{bias} es puramente determinística,

$$\begin{aligned}
 E\{\hat{g}_t\} &= E\left\{g_t^0 + \sum_{k=-\delta_\gamma}^{\delta_\gamma} w_\gamma(k)\hat{R}_{vu}^N(k)\beta_{t-k} + g_t^{bias}\right\} \\
 &\stackrel{(a)}{=} g_t^0 + g_t^{bias} + \sum_{k=-\delta_\gamma}^{\delta_\gamma} w_\gamma(k)\left(\frac{1}{N}\sum_{m=1}^N E\{v_m\}u_{m-k}\right)\beta_{t-k} \\
 &\stackrel{(b)}{=} g_t^0 + g_t^{bias}, \tag{6.4.15}
 \end{aligned}$$

donde (a) es producto de la linealidad del operador esperanza, y (b) dado que la media del ruido blanco v_k es cero. Note que este estimador es sesgado, pues $g_t^{bias} \neq 0$. De hecho, el sesgo está dado por esta secuencia, la cual al igual que para la Sección 6.2 no se determina explícitamente pues no es necesario para establecer el método propuesto. De forma análoga al caso en la Sección 6.2, este término puede ser despreciable a medida que $N \rightarrow \infty$ si se elige γ correctamente en función de N .

- Covarianza:

$$\begin{aligned}
 E\{(\hat{g}_t - E\{\hat{g}_t\})(\hat{g}_l - E\{\hat{g}_l\})\} &= E\left\{\sum_{k=-\delta_\gamma}^{\delta_\gamma} w_\gamma(k)\hat{R}_{vu}^N(k)\beta_{t-k} \sum_{m=-\delta_\gamma}^{\delta_\gamma} w_\gamma(m)\hat{R}_{vu}^N(m)\beta_{l-m}\right\} \\
 &\stackrel{(a)}{=} \sum_{k=-\delta_\gamma}^{\delta_\gamma} \sum_{m=-\delta_\gamma}^{\delta_\gamma} w_\gamma(k)w_\gamma(m)\beta_{t-k}\beta_{l-m} E\left\{\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^N v_i u_{i-k} \sum_{j=1}^N v_j u_{j-m}\right\} \\
 &\stackrel{(b)}{=} \frac{1}{N^2} \sum_{k=-\delta_\gamma}^{\delta_\gamma} \sum_{m=-\delta_\gamma}^{\delta_\gamma} w_\gamma(k)w_\gamma(m)\beta_{t-k}\beta_{l-m} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N E\{v_i v_j\}u_{i-k}u_{j-m} \\
 &\stackrel{(c)}{=} \frac{\sigma^2}{N^2} \sum_{k=-\delta_\gamma}^{\delta_\gamma} \sum_{m=-\delta_\gamma}^{\delta_\gamma} \sum_{i=1}^N w_\gamma(k)w_\gamma(m)\beta_{t-k}\beta_{l-m}u_{i-k}u_{i-m}, \tag{6.4.16}
 \end{aligned}$$

donde (a) se obtiene reordenando las sumatorias, expandiendo las funciones de covarianza y empleando la propiedad de linealidad del operador esperanza, (b) se consigue reordenando las sumatorias y por linealidad de $E\{\cdot\}$, y (c) es gracias a que $\{v_i\}$ es ruido blanco.

- Matriz de covarianza: Se trabaja de forma análoga que ETFE no suavizado. En este caso, el error de estimación con respecto a la media está dado por

$$e_t = \hat{g}_t - E\{\hat{g}_t\} = \sum_{k=-\delta_\gamma}^{\delta_\gamma} w_\gamma(k)\hat{R}_{vu}^N(k)\beta_{t-k}. \tag{6.4.17}$$

El error se puede escribir en forma matricial como

$$\mathbf{e} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{v}}, \tag{6.4.18}$$

donde \mathbf{e} está definido en (3.3.4), mientras que \mathbf{B} es una matriz de Toeplitz de dimensiones $(N + M + 1) \times 2\delta_\gamma + 1$ cuyos elementos son

$$[\mathbf{B}]_{i,k} = \beta_{i-k-M+\delta_\gamma}, \quad i = 1, \dots, N + M + 1, \quad k = 1, \dots, 2\delta_\gamma + 1, \quad (6.4.19)$$

con β_k definidos en (6.4.11).

Además, $\tilde{\mathbf{v}}$ está dado por $\tilde{\mathbf{v}} = [\tilde{v}_{-\delta_\gamma} \dots \tilde{v}_{\delta_\gamma}]^T$, los cuales están definidos en (6.4.10). Este vector también admite una descomposición similar al vector \mathbf{e} :

$$\tilde{\mathbf{v}} = \frac{1}{N} \text{diag}(w_\gamma) \mathbf{U} \mathbf{v}, \quad (6.4.20)$$

donde \mathbf{v} se encuentra definido en (3.3.4), $\text{diag}(w_\gamma)$ es una matriz diagonal formada por los elementos $w_\gamma(k)$, $k = -\delta_\gamma, \dots, \delta_\gamma$, y \mathbf{U} es también matriz de Toeplitz, con elementos dados por

$$[\mathbf{U}]_{i,k} = \begin{cases} u_{-i+k+\delta_\gamma+1}, & -\delta_\gamma \leq -i+k \leq N-1-\delta_\gamma \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, 2\delta_\gamma + 1, \quad k = 1, \dots, N. \quad (6.4.21)$$

Así, la matriz de covarianza $\text{cov}(\mathbf{e})$ se obtiene directamente como

$$\text{cov}(\mathbf{e}) = E \left\{ \mathbf{B} \frac{1}{N} \text{diag}(w_\gamma) \mathbf{U} \mathbf{v} \mathbf{v}^T \mathbf{U}^T \text{diag} \frac{1}{N} (w_\gamma) \mathbf{B}^T \right\} = \frac{\sigma^2}{N^2} \mathbf{B} \text{diag}(w_\gamma) \mathbf{U} \mathbf{U}^T \text{diag}(w_\gamma) \mathbf{B}^T. \quad (6.4.22)$$

Con los cálculos anteriores, se ha determinado la media, covarianza, y matriz de covarianza del estimador ETFE suavizado. Ahora, se usarán estos desarrollos para formular el resultado fundamental de este capítulo, el estimador ETFE suavizado causal.

6.5. ETFE Suavizado Causal

En esta sección, se formula el estimador ETFE suavizado que fuerza estimaciones causales, y se comprueba su efectividad en simulación.

6.5.1. Formulación del método

Esencialmente, el problema de encontrar un estimador causal de la respuesta a impulso dada por ETFE suavizado es el mismo que el problema ya resuelto para el caso no enventanado. En este caso, se tiene que el estimador de la respuesta a impulso por ETFE suavizado es una variable aleatoria $\hat{\mathbf{g}}$

con media $\boldsymbol{\mu}$ y matriz de covarianza $\mathbf{P} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{11} & \mathbf{P}_{12} \\ \mathbf{P}_{12}^T & \mathbf{P}_{22} \end{bmatrix}$, donde:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} g_{-M}^{bias} \\ \vdots \\ g_{-1}^{bias} \\ g_0^0 + g_0^{bias} \\ \vdots \\ g_N^0 + g_N^{bias} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\mu}_1 \\ \boldsymbol{\mu}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \frac{\sigma^2}{N^2} \mathbf{B} \text{diag}(w_\gamma) \mathbf{U} \mathbf{U}^T \text{diag}(w_\gamma) \mathbf{B}^T, \quad (6.5.1)$$

y donde $\mathbf{P}_{11} \in \mathbb{R}^{M \times M}$; $\mathbf{P}_{12} \in \mathbb{R}^{M \times (N+1)}$, y $\mathbf{P}_{22} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$.

Naturalmente, la primera opción para estimar $\hat{\mathbf{g}}$ causal consiste en simplemente truncar la parte no causal, al igual que en el caso no enventanado:

$$\tilde{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M \times M} & \mathbf{0}_{M \times (N+1)} \\ \mathbf{0}_{(N+1) \times M} & \mathbf{I}_{N+1} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{g}}. \quad (6.5.2)$$

Para obtener un mejor estimador, se obtiene la factorización de Cholesky de \mathbf{P} dada por $\mathbf{P} = \mathbf{C}\mathbf{C}^T$, donde $\mathbf{C} = \sigma N^{-1} \mathbf{B} \text{diag}(\omega_\gamma) \mathbf{U} \mathbf{Q}$, donde \mathbf{Q} es matriz ortogonal tal que \mathbf{C} es triangular inferior con elementos no negativos en su diagonal. Esto se puede hacer encontrando la factorización $\mathbf{Q}\mathbf{R}$ de $\sigma N^{-1} \mathbf{U}^T \text{diag}(\omega_\gamma) \mathbf{B}^T$, de forma análoga al caso sin ventana (o con ventana rectangular).

Entonces, se introduce el estimador de respuesta a impulso causal $\tilde{\mathbf{g}}_c$:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{g}}_c &= \mathbf{C} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M \times M} & \mathbf{0}_{M \times (N+1)} \\ \mathbf{0}_{(N+1) \times M} & \mathbf{I}_{N+1} \end{bmatrix} \mathbf{C}^{-1} \hat{\mathbf{g}} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{0}_{M \times (N+1)} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{M \times M} & \mathbf{0}_{M \times (N+1)} \\ \mathbf{0}_{(N+1) \times M} & \mathbf{I}_{N+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{C}^{-1})_{11} & \mathbf{0}_{M \times (N+1)} \\ (\mathbf{C}^{-1})_{21} & (\mathbf{C}^{-1})_{22} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{g}} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}_{21} \mathbf{C}_{11}^{-1} & \mathbf{I}_{N+1} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{g}}, \end{aligned} \quad (6.5.3)$$

donde $\mathbf{C}_{11}, (\mathbf{C}^{-1})_{11} \in \mathbb{R}^{M \times M}$; $\mathbf{C}_{21}, (\mathbf{C}^{-1})_{21} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times M}$, y $\mathbf{C}_{22}, (\mathbf{C}^{-1})_{22} \in \mathbb{R}^{(N+1) \times (N+1)}$.

Aplicando los teoremas 5.3.1, 5.3.2, 5.3.3 y 5.3.4 demostrados en el capítulo 5, se concluye que el estimador (6.5.3) tiene matriz de covarianza menor o igual al estimador tradicional de la respuesta a impulso por ETFE suavizado, y es el óptimo entre el conjunto de los estimadores lineales asintóticamente no sesgados definidos en (5.3.6), en cuanto a que presenta la menor matriz de covarianza.

Cabe notar que el estimador ETFE suavizado causal es sesgado. Esta propiedad se hereda del estimador ETFE suavizado, en el cual existe un compromiso entre sesgo y varianza. Se recuerda que al elegir correctamente el parámetro γ , se puede obtener un estimador consistente y que minimice el error cuadrático medio.

6.5.2. Implementación y Simulaciones

De igual forma que para el capítulo anterior, a continuación se presentan los principales avances en implementación y simulación de este nuevo estimador, con el fin de comprobar los resultados obtenidos en la teoría.

A. Consideraciones previas

Para la implementación del estimador ETFE suavizado y su estimador causal por MATLAB, se tienen en cuenta las siguientes consideraciones:

- Los sistemas estudiados en esta sección son idénticos a los usados para simular el caso sin ventanas, pues se consideran que son ejemplos representativos dentro de su ámbito.

- La elección de ventana depende generalmente de la aplicación. No existe una solución óptima, pero la ventana más común es la *Hamming* [66], la cual se define como

$$w_\gamma(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \cos\left(\frac{\pi k}{\gamma}\right) \right) & , |k| < \gamma \\ 0 & , |k| \geq \gamma. \end{cases} \quad (6.5.4)$$

Para las simulaciones hechas, se ha considerado esta ventana. Por supuesto, el análisis y los resultados son similares para otras ventanas escogidas dado que la teoría formulada no depende de la elección particular de ventana.

- Para elegir el tamaño de la ventana δ_γ , se debe tener en cuenta que existe un compromiso entre la resolución frecuencial y la varianza. En el caso de contar con máximos de resonancia angostos, es necesario elegir un valor grande de δ_γ para obtener mejor resolución en frecuencia al achicar el ancho de banda en frecuencia, aceptando una mayor varianza coeficiente por coeficiente. En [1] se reconoce que determinar este parámetro no es trivial. El criterio comúnmente utilizado es el siguiente:

1. El parámetro δ_γ debe ser pequeño comparado con la cantidad de datos N para reducir las fluctuaciones aleatorias de los periodogramas.
2. Para considerar las partes de interés del espectro real, debe satisfacerse que $|\hat{R}_u(\tau)|$ sea significativamente menor a $\hat{R}_u(0)$ para $\tau \geq \delta_\gamma$. Esto dado que para entradas dadas por procesos estacionarios en sentido amplio², se tiene $\hat{R}_u(0) \geq |\hat{R}_u(\tau)|$ para todo τ [67] y por ende, se debe satisfacer que la función de autocovarianza decaiga lo suficiente en comparación con el valor más importante antes de no ser considerada en el inventariado.

Determinar una cota superior en la proporción entre $|\hat{R}_u(\tau)|$ y $\hat{R}_u(0)$ para $\tau \geq \delta_\gamma$ puede ser útil para obtener un criterio objetivo para escoger δ_γ . Sin embargo, en la práctica la elección finalmente se reduce a probar con valores pequeños de δ_γ , e ir aumentando este parámetro de forma progresiva hasta encontrar un espectro que equilibre la resolución frecuencial con una varianza aceptable.

- El cálculo de la matriz de Cholesky \mathbf{C} , análogamente al caso sin ventanas, se ha determinado a partir de la expresión (6.4.22), la cual tiene como estructura implícita aquélla que se busca con la factorización de Cholesky. Para formar la matriz \mathbf{C} pedida, la cual es triangular inferior, se aplica una factorización **QR** de la misma manera que en el caso no inventariado. Para más información sobre este tratamiento, se sugiere revisar el Apéndice de este texto, Sección A.4.

Tomando estas observaciones en consideración, a continuación se prueba estadísticamente y con ejemplos el estimador causal obtenido.

B. Sistema FIR

Se considera el sistema FIR dado en (5.4.3). Excitando este sistema con ruido blanco Gaussiano de media cero y varianza 1, se realizan 500 experimentos con secuencia de entrada $\{u_t\}$ fija, y varianza de ruido blanco aditivo a la salida $\sigma^2 = 0.1$. Dado que la respuesta en frecuencia del sistema

²Un proceso X se dice estacionario en sentido amplio si y sólo si su media μ_X es constante para todo t , y la función de autocovarianza $R_X(t + \tau, t)$ es una función de τ solamente, para todo valor de τ, t .

no tiene resonancias angostas, es recomendable fijar un δ_γ pequeño, para disminuir la varianza sin perder la identificación de peaks de frecuencia. Se escoge $\delta_\gamma = 30$ y $M = 100$. Con estos valores, se obtienen los coeficientes β_k para k desde $-M - \delta_\gamma$ hasta $N + \delta_\gamma - 1$, los cuales son los coeficientes necesarios para obtener la matriz \mathbf{C} de la factorización de Cholesky de la matriz de covarianza \mathbf{P} . En la Figura 6.4 se observan los coeficientes β_k para $\delta_\gamma = 30$.

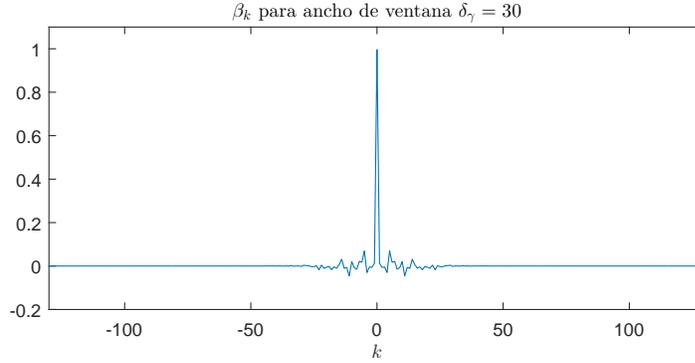


Figura 6.4: Coeficientes β_k de la serie de Laurent de $z^{\delta_\gamma}(N_U(z))^{-1}$ para $\delta_\gamma = 30$.

Claramente, β_k es aproximadamente cero para casi todo valor de k , salvo en el intervalo $|k| < \delta_\gamma$. El problema asociado a esto, es que la matriz \mathbf{C}_{11} no se encuentra bien condicionada al formarse con una gran cantidad de valores cercanos a cero de β_k , y por lo tanto, numéricamente no es posible obtener una matriz \mathbf{C}_{11} invertible. Por lo tanto, para solucionar los problemas numéricos asociados y así obtener una estimación causal, se debe aumentar el valor del parámetro δ_γ .

Fijando $\delta_\gamma = 100$, que corresponde aproximadamente al valor mínimo que no provoca problemas numéricos asociados a la inversión de \mathbf{C}_{11} , se obtienen las siguientes matrices de covarianza de cada estimador para los tres primeros valores de la respuesta a impulso:

$$\text{cov}(\hat{\mathbf{g}}) = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.1134 & 0.0037 & 0.0069 \\ 0.0037 & 0.1084 & -0.0039 \\ 0.0069 & -0.0039 & 0.1225 \end{bmatrix}, \quad \text{cov}(\tilde{\mathbf{g}}_c) = 10^{-3} \begin{bmatrix} 0.1100 & 0.0040 & 0.0062 \\ 0.0040 & 0.1034 & -0.0030 \\ 0.0062 & -0.0030 & 0.1199 \end{bmatrix}.$$

Determinando los valores propios de la matriz $\text{cov}(\hat{\mathbf{g}}) - \text{cov}(\tilde{\mathbf{g}}_c)$, se tiene $\lambda = \{0.20 \times 10^{-5}, 0.35 \times 10^{-5}, 0.55 \times 10^{-5}\}$. Como todos los autovalores obtenidos son positivos, tiene para este ejemplo que $\text{cov}(\hat{\mathbf{g}}) \geq \text{cov}(\tilde{\mathbf{g}}_c)$.

Por otra parte, se puede notar que las varianzas de cada valor estimado, dados por la diagonal de cada matriz de covarianza, son estrictamente menores para la estimación causal $\tilde{\mathbf{g}}_c$, para los tres valores estimados de la respuesta a impulso. Las trazas de las matrices de covarianzas de las estimaciones presentadas son:

$$\text{tr}\{\text{cov}(\hat{\mathbf{g}})\} = 3.4432 \times 10^{-4}, \quad \text{tr}\{\text{cov}(\tilde{\mathbf{g}}_c)\} = 3.3325 \times 10^{-4}. \quad (6.5.5)$$

Tal como se esperaba, la estimación ETFE suavizada causal tiene menor traza de matriz de covarianza que el método ETFE suavizado tradicional. La reducción es de un 3.22 %, el cual ya se encuentra reducido por el suavizado producido por el proceso de enventanamiento.

Sólo a modo de ilustración, la respuesta en frecuencia estimada con respuesta a impulso causal y la tradicional se presentan junto con la respuesta en frecuencia real en la Figura 6.5.

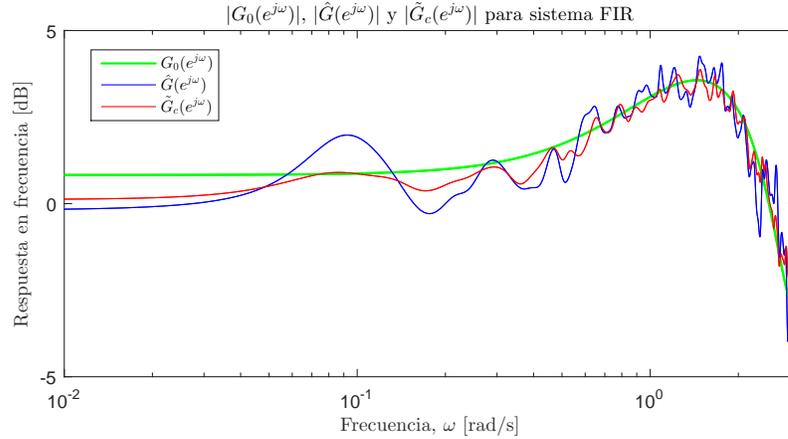


Figura 6.5: Respuesta en frecuencia real (verde), estimada con ETFE suavizado tradicional (azul), y con ETFE suavizado causal (rojo), de un sistema FIR con $\delta_\gamma = 100$.

En la Figura 6.5, que corresponde a sólo un experimento realizado para estimar la respuesta en frecuencia del sistema, se observa una pequeña mejora de la estimación causal (en rojo) en comparación con la estimación suavizada tradicional.

C. Sistema de segundo orden

Se considera el sistema de segundo orden dado en (5.4.5). Note que el sistema continuo del cual proviene (5.4.5), tiene coeficiente de amortiguamiento $\xi = 0.1$. Es decir, se está trabajando con un sistema altamente resonante, lo cual implica que contiene peaks muy angostos de frecuencia. Por supuesto esto no se sabe a priori, pero probando con distintos valores de δ_γ , se ve la necesidad de elegir un ancho de ventana grande, para obtener así mayor resolución espectral y poder distinguir con mayor claridad los peaks.

Escogiendo $\delta_\gamma = 180$, $N = 1000$, $M = 150$, varianza del ruido $\sigma^2 = 0.25$, se grafican las varianzas empíricas coeficiente por coeficiente de cada estimador, obteniéndose el resultado de la Figura 6.6. Como se muestra en la Figura 6.6, el estimador causal es ligeramente mejor coeficiente por coeficiente en varianza. Esto se aprecia en la traza de las matrices de covarianza asociadas a cada estimador:

$$\text{tr}\{\text{cov}(\hat{\mathbf{g}})\} = 0.0186 \quad , \quad \text{tr}\{\text{cov}(\hat{\mathbf{g}}_c)\} = 0.0174. \quad (6.5.6)$$

Es decir, el método causal disminuye la traza de la matriz de covarianza en un 6.45 %. La respuesta a impulso estimada con ETFE suavizado y suavizado causal se muestra en la Figura 6.7.

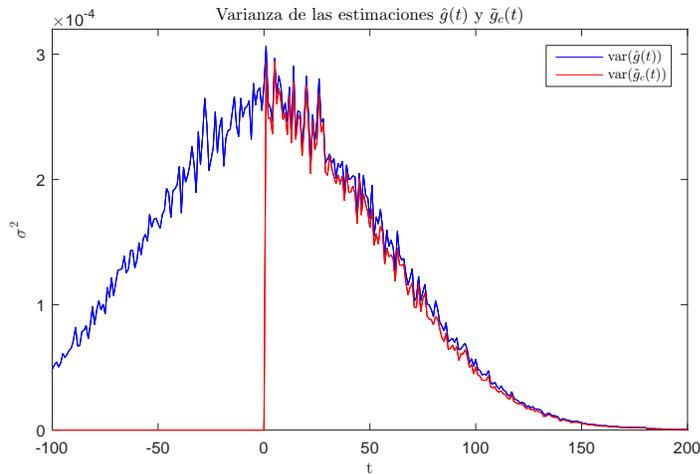


Figura 6.6: Varianzas empíricas de $\hat{g}(t)$ (azul), y el estimador suavizado causal $\tilde{g}_c(t)$ (rojo), para sistema de segundo orden con varianza de ruido $\sigma^2 = 0.25$ y $\delta_\gamma = 180$.

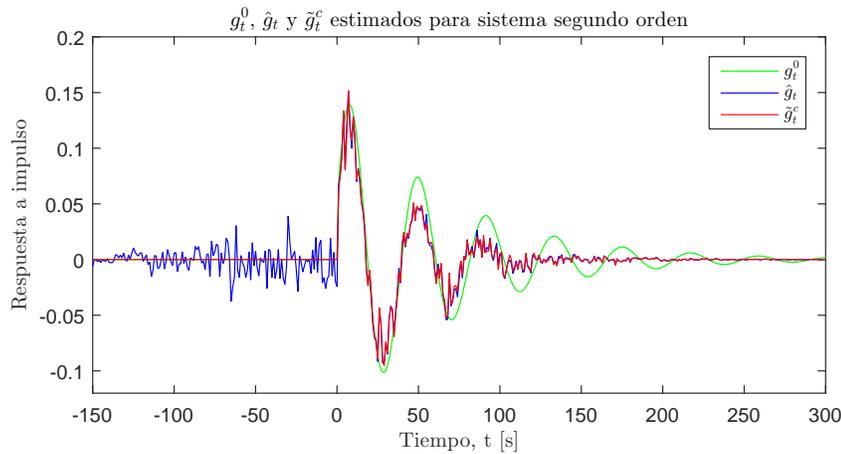


Figura 6.7: Respuesta a impulso verdadera (verde), y respuesta a impulso estimada con ETFE suavizada (azul) y ETFE suavizada causal (rojo) para $\delta_\gamma = 180$.

Tal como se ha visto en las simulaciones anteriores, el nuevo estimador propuesto es causal y con iguales o mejores características en covarianza.

Dado que se ha comprobado que el estimador causal disminuye la varianza coeficiente por coeficiente, es posible escoger un valor mayor de ancho de ventana δ_γ para mayor resolución frecuencial y con varianza reducida en comparación al ETFE suavizado tradicional. De esta forma, se pretende apalejar la pérdida en varianza por el valor alto de δ_γ con causalidad, obteniendo un estimador con buena resolución frecuencial y varianza aceptable. A modo de ejemplo, en las Figuras 6.8 y 6.9 se observa la varianza empírica coeficiente por coeficiente y la respuesta a impulso estimada con la

respuesta en frecuencia respectivamente para $N = 1000$, $M = 150$ y un ancho de ventana $\delta_\gamma = 250$.

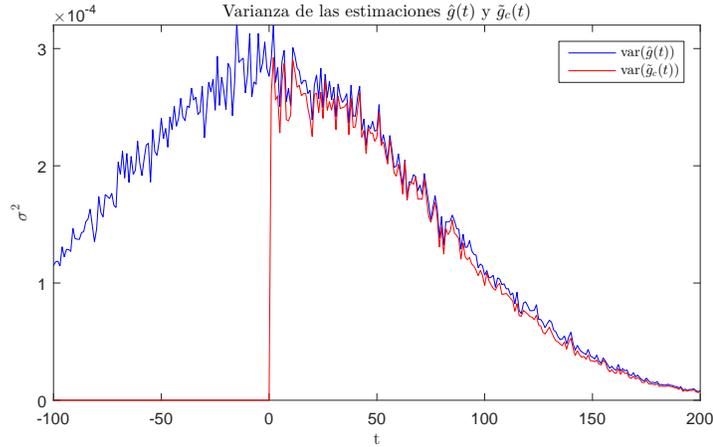


Figura 6.8: Varianzas empíricas de $\hat{g}(t)$ (azul), y el estimador suavizado causal $\tilde{g}_c(t)$ (rojo), para sistema de segundo orden con varianza de ruido $\sigma^2 = 0.25$ y $\delta_\gamma = 250$.

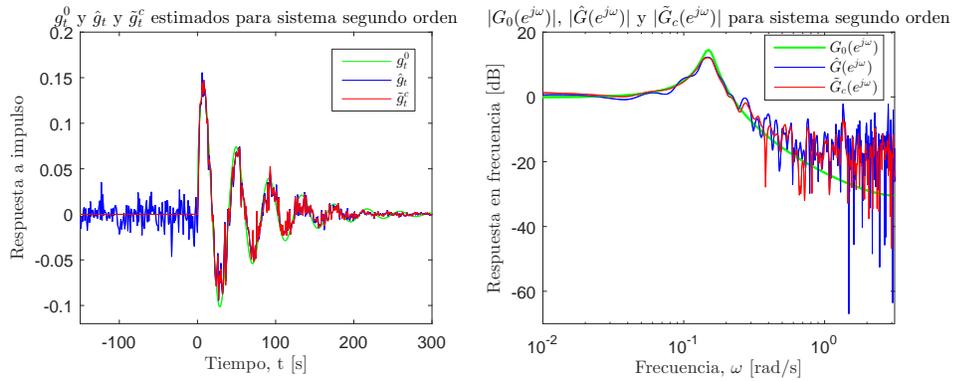


Figura 6.9: Estimaciones de un sistema segundo orden con $\delta_\gamma = 250$. Izquierda: respuesta a impulso verdadera (verde), y respuesta a impulso estimada con ETFE suavizada (azul) y ETFE suavizada causal (rojo). Derecha: respuesta en frecuencia real (verde), estimada con ETFE suavizado tradicional (azul), y con ETFE suavizado causal (rojo).

En este ejemplo, las trazas de las matrices de covarianzas son

$$\text{tr}\{\text{cov}(\hat{\mathbf{g}})\} = 0.0158 \quad , \quad \text{MSE}_{\tilde{\mathbf{g}}_c} = 0.0148, \quad (6.5.7)$$

lo que se traduce en una mejora de un 6.33 % en error cuadrático medio.

De lo anterior se concluye que una opción posible para la estimación de la respuesta a impulso por ETFE y ETFE causal, es escoger un ancho de ventana δ_γ más grande de lo usual. Aparte de mejorar el condicionamiento numérico del estimador, el método causal minimiza el aumento de varianza producido por aumentar el ancho de ventana. Por ende, al escoger δ_γ más grande y estimando

por ETFE suavizado causal se puede apostar por una mayor resolución frecuencial sin perder tanto en varianza, y por supuesto produciendo resultados causales. Esto es aplicable para cualquier orden de sistema.

D. Sistema de tercer orden

Se considera el sistema de tercer orden dado en (5.4.6). Para 500 experimentos con $N = 1000$, $M = 100$, varianza del ruido $\sigma^2 = 0.15$ y $\delta_\gamma = 200$, se obtienen los resultados graficados en la Figura 6.10.

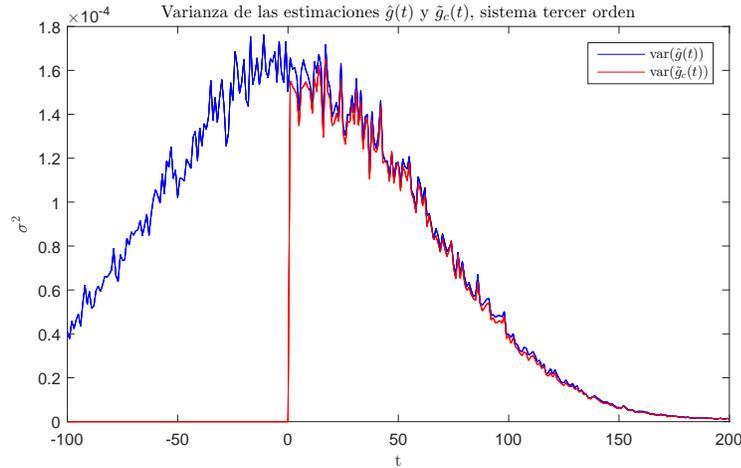


Figura 6.10: Varianzas empíricas de $\hat{g}(t)$ (azul), y el estimador suavizado causal $\tilde{g}_c(t)$ (rojo), para sistema de tercer orden con varianza de ruido $\sigma^2 = 0.15$ y $\delta_\gamma = 200$.

Tal como se vio en la Figura 6.8, la Figura 6.10 presenta menor varianza coeficiente por coeficiente con el método propuesto, en comparación con ETFE suavizado tradicional. En este caso, los errores cuadráticos medios se presentan a continuación:

$$\text{MSE}_{\hat{\mathbf{g}}} = 0.0112 \quad , \quad \text{tr}\{\text{cov}(\tilde{\mathbf{g}}_c)\} = 0.0104. \quad (6.5.8)$$

Como era esperado, el estimador causal tiene menor traza de matriz de covarianza que el caso tradicional. La disminución para este caso, con los parámetros escogidos, es de un 7.14 %.

A modo de ilustración, en la Figura 6.11 se observan las respuestas estimadas en el dominio del tiempo y frecuencia con ambos métodos (suavizado tradicional, y suavizado causal) para una realización del experimento.

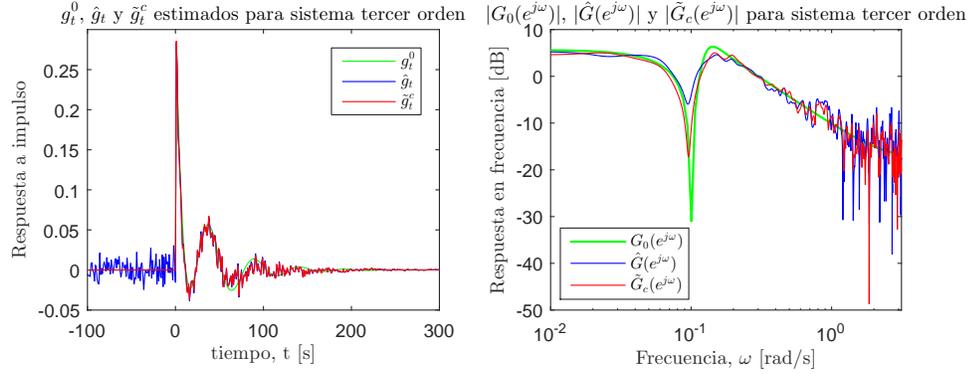


Figura 6.11: Estimaciones de un sistema tercer orden con $\delta_\gamma = 200$. Izquierda: Respuesta a impulso verdadera (verde), y respuesta a impulso estimada con ETFE suavizada (azul) y ETFE suavizada causal (rojo). Derecha: Respuesta en frecuencia real (verde), estimada con ETFE suavizado tradicional (azul), y con ETFE suavizado causal (rojo), todas en escala logarítmica.

Tal como se ha visto en las simulaciones anteriores, si bien no es posible concluir mejoras estadísticas con sólo una realización, se ha comprobado que el método propuesto es superior al tradicional en varianza, manteniendo el sesgo inherente al suavizado, pero forzando causalidad en la respuesta a impulso.

E. Comparación entre los cuatro estimadores presentados

Para terminar esta sección, se analiza la varianza en los cuatro estimadores estudiados: ETFE tradicional \hat{g}_t , ETFE causal \tilde{g}_t^c , ETFE suavizado tradicional \tilde{g}_t^s , y ETFE suavizado causal \tilde{g}_t^{cs} .

Considerando el sistema de tercer orden

$$y_t = \frac{0.41275(q^2 - 1.98q + 1)}{(q - 0.9704)(q^2 - 1.852q + 0.9231)}u_t + v_t, \quad (6.5.9)$$

con $\{u_t\}$ y $\{v_t\}$ ruido blanco Gaussianos of varianza 1 y 0.05 respectivamente. Se realizan 500 experimentos con $N = 1000$, $M = 150$, $\delta_\gamma = 180$. En la Figura 6.12 se muestran las varianzas coeficiente por coeficiente para los cuatro estimadores estudiados.

Los errores cuadráticos medios (MSE) en conjunto con las trazas de las matrices de covarianzas asociados a cada estimador para las primeras 150 muestras de la respuesta a impulso estimadas son los siguientes:

Tabla 6.1: Traza de la matriz de covarianza y error cuadrático medio de las primeras 150 muestras estimadas por ETFE, ETFE causal, ETFE suavizado, y ETFE causal suavizado respectivamente.

	$\hat{\mathbf{g}}$	$\tilde{\mathbf{g}}^c$	$\tilde{\mathbf{g}}^s$	$\tilde{\mathbf{g}}^{cs}$
$\text{tr}\{\text{cov}(\cdot)\}$	$1.609 \cdot 10^{-2}$	$1.329 \cdot 10^{-2}$	$0.365 \cdot 10^{-2}$	$0.345 \cdot 10^{-2}$
MSE	$1.789 \cdot 10^{-2}$	$1.476 \cdot 10^{-2}$	$1.029 \cdot 10^{-2}$	$1.076 \cdot 10^{-2}$

Los estimadores causales tradicional y suavizado reducen la traza de la matriz de covarianza

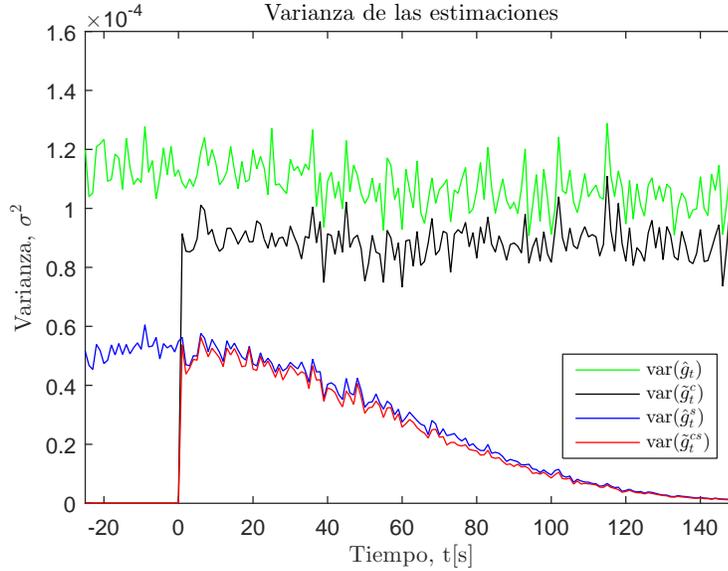


Figura 6.12: Varianza coeficiente por coeficiente de $\hat{\mathbf{g}}$ (verde), $\tilde{\mathbf{g}}^c$ (negro), $\hat{\mathbf{g}}^s$ (azul), and $\tilde{\mathbf{g}}^{cs}$ (rojo).

en 17.4 % y 5.48 % respectivamente en comparación con los estimadores clásicos. En cuanto al MSE, el estimador tradicional observa una caída debido a que la varianza decae considerablemente y además el sesgo adicional reduce el sesgo inherente al estimador. Por otra parte, esto no se ve en el caso ETFE suavizado. Para estas simulaciones el efecto del sesgo es considerable, provocando un aumento en el MSE pero con una leve mejora en varianza.

Además, se puede notar en la Figura 6.12 que debido al suavizado, los coeficientes β_k tienden a cero rápidamente para entrada ruido blanco (a diferencia de los coeficientes α_k para el caso no enventanado), lo que provoca que el error de estimación tienda a cero más rápido que el caso no suavizado, cuando $t \rightarrow \infty$.

Finalmente, es posible analizar el efecto del parámetro M en el error cuadrático medio de cada estimador. Para el mismo setup planteado anteriormente, se muestran los errores cuadráticos medios para distintos valores de M en la Tabla 6.2.

Tabla 6.2: MSE de las primeras 150 muestras estimadas por ETFE, ETFE causal, ETFE suavizado, y ETFE causal suavizado considerando $M = 50, 100, 150, 200$.

$M \backslash \text{MSE}$	$\hat{\mathbf{g}}$	$\tilde{\mathbf{g}}^c$	$\hat{\mathbf{g}}^s$	$\tilde{\mathbf{g}}^{cs}$
50	$2.33 \cdot 10^{-2}$	$2.16 \cdot 10^{-2}$	$1.00 \cdot 10^{-2}$	$0.98 \cdot 10^{-2}$
100	$2.33 \cdot 10^{-2}$	$2.04 \cdot 10^{-2}$	$1.00 \cdot 10^{-2}$	$0.97 \cdot 10^{-2}$
150	$2.33 \cdot 10^{-2}$	$2.00 \cdot 10^{-2}$	$1.00 \cdot 10^{-2}$	$0.99 \cdot 10^{-2}$
200	$2.33 \cdot 10^{-2}$	$1.92 \cdot 10^{-2}$	$1.00 \cdot 10^{-2}$	$1.14 \cdot 10^{-2}$

De la Tabla 6.2 se deduce que valores más grandes de M pueden tener un efecto positivo en el MSE de las muestras causales estimadas. Nótese que existe un compromiso entre mejorar la varianza

término a término, y el incremento del sesgo. La reducción en ganancia para el caso suavizado se debe al aumento de precisión de los valores causales estimados con esta técnica.

6.6. Conclusiones

En el capítulo presentado se han estudiado tres extensiones al método discutido en el Capítulo 5. Se analizó la posibilidad de extender el método causal para ETFE considerando la incorporación de condiciones iniciales y se abarcó la formulación e implementación del estimador ETFE causal en estructuras generales. Finalmente se formuló e implementó en simulación el método ETFE suavizado.

A partir de los primeros análisis, se muestra que la incorporación de condiciones iniciales no dificulta ni facilita la construcción del estimador ETFE causal, dado que la pérdida en sesgo no influye en la matriz de covarianza, la cual es igual a la del caso con condiciones iniciales cero.

Por otra parte, el estimador ETFE en estructuras generales asume expresiones más complejas, y se requiere conocer la respuesta a impulso del filtro del ruido blanco $H_0(q)$, la cual en general no se conoce. Por ende, si bien la estimación por ETFE causal sí se puede hacer, no se establecen condiciones de optimalidad pues depende de la estimación de la respuesta a impulso del ruido. Aún así, gracias a un método sencillo de estimación de la respuesta a impulso del filtro del ruido, se ha analizado en simulación el efecto en la varianza coeficiente por coeficiente de la respuesta a impulso estimada, concluyéndose que en promedio se obtienen mejores resultados en varianza con esta nueva técnica.

En cuanto a la estimación no paramétrica por ETFE suavizado, dado el amplio uso de esta herramienta de estimación, lograr una mejora a ésta se considera una de las contribuciones más importantes de esta tesis. Además de forzar causalidad, se ha logrado disminuir la matriz de covarianza de los coeficientes estimados, y se ha mostrado su efectividad en simulación, disminuyendo la varianza de cada coeficiente, y logrando obtener mejoras de hasta un 9 % en la traza de la matriz de covarianza, y con esto una reducción del error cuadrático medio dependiendo de la cantidad de datos no causales forzados a cero. Además, se ha comparado los 4 estimadores ETFE estudiados en esta tesis, y cómo influye el parámetro M sobre éstos en la traza de la matriz de covarianza y en el MSE.

IMPOSICIÓN DE PASIVIDAD EN ETFE

7.1. Introducción

En este capítulo se discute cómo imponer la condición de pasividad en la estimación no paramétrica de un sistema usando métodos de análisis espectral.

Para esto, se debe comprender en primer lugar qué es pasividad, y su concepto dentro de la teoría de sistemas lineales. Amplia bibliografía hay en este tema, y por ende sólo se abarcan los conceptos esenciales que son afines a la tesis, en perjuicio de un estudio más acabado del tema en su conjunto. Se entregan las definiciones preliminares para caracterizar formalmente los sistemas lineales pasivos, con énfasis en las caracterizaciones en frecuencia.

Un tema de interés para la imposición de pasividad en sistemas, es entender bajo qué condiciones se obtienen sistemas de esta índole. El proceso de discretización es de interés, en cuanto a que puede preservar o no la pasividad de un sistema en tiempo continuo. El estudio de este tema resulta vital para comprender las aplicaciones de la teoría desarrollada.

El fin último es imponer en frecuencia la condición de pasividad en sistemas discretos. Para esto, al final de este capítulo se analizan las propiedades frecuencias del estimador ETFE, para proponer estrategias de imposición de pasividad.

7.2. Definiciones y conceptos preliminares

Antes de comenzar, resulta de gran utilidad tener en mente algunos conceptos de interés, que serán ocupados en los resultados posteriores. Debido a que el concepto de pasividad y sus implicaciones son más complejas matemáticamente que el concepto de causalidad, en esta sección se establecen las bases teóricas para comprender el tema de pasividad y cómo imponer esta condición.

Sistemas pasivos pueden ser pensados como sistemas que sólo almacenan o disipan energía que se les proporcionó. Es decir, son sistemas que no generan energía. Estos tipos de sistemas pueden ser analizados estudiando su relación entrada-salida. En esta tesis, se estudia la propiedad de pasividad en sistemas SISO (*Single Input- Single Output*), lineales e invariantes en el tiempo.

Históricamente, la teoría de sistemas pasivos proviene de la teoría de circuitos eléctricos. Un circuito pasivo es uno construido únicamente con componentes pasivas: resistencias, inductores, y

condensadores (posteriormente, transformadores y también giradores [68]). En un circuito de múltiples puertas, suponiendo que no hay energía almacenada en el instante inicial, el circuito será pasivo si y sólo si

$$\int_0^\tau v(t)^T i(t) dt \geq 0$$

para todo $\tau \geq 0$, donde $v(t)$ es el vector de voltajes, e $i(t)$ es el vector de corrientes. Nótese que pasividad se puede definir sólo cuando existe igual cantidad de entradas que salidas en la representación del circuito por múltiples puertas, y depende de cómo se relacionan a priori estas variables por pares.

En control y teoría de sistemas SISO, el criterio de pasividad es análogo:

$$\int_0^\tau y(t)u(t) dt \geq 0,$$

con salida $y(t)$ y entrada $u(t)$ ambas escalares. Para los objetivos presentados, se estudiará pasividad en modelos en tiempo discreto.

Antes de definir formalmente el concepto de pasividad, se presentan algunas definiciones usadas extensamente en la literatura asociada [42, 69, 70]. Sea \mathcal{H} el espacio de todas las funciones $u : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfacen

$$\|u\|_2^2 = \sum_{t=1}^{\infty} u^2(t) < \infty.$$

De forma similar, se denota \mathcal{H}_e como el subespacio extendido de \mathcal{H} de funciones $u : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ introduciendo el operador de truncamiento:

$$x_N(t) = \begin{cases} x(t), & t \leq N \\ 0, & t > N. \end{cases}$$

Así, \mathcal{H}_e satisface

$$\|u_N\|_2^2 = \sum_{t=1}^N u^2(t) < \infty; \quad \text{para todo } N \in \mathbb{Z}^+.$$

Además de la definición anterior, se introduce un producto interno sobre el intervalo $\{1, 2, \dots, N\}$ como

$$\langle y, u \rangle_N = \sum_{t=1}^N y(t)u(t).$$

Para facilitar la notación, se tiene la siguiente equivalencia¹

$$\langle (Gu)_N, u_N \rangle = \langle (Gu)_N, u \rangle = \langle Gu, u_N \rangle = \langle Gu, u \rangle_N. \quad (7.2.1)$$

Definición 7.2.1. Sea $G : \mathcal{H}_e \rightarrow \mathcal{H}_e$. Se dice que un sistema G es pasivo si existe $\beta \geq 0$ tal que

$$\langle Gu, u \rangle_N \geq -\beta, \text{ para todo } u \in \mathcal{H}_e, \text{ para todo } N \in \mathbb{Z}^+. \quad (7.2.2)$$

¹Aquí se introduce la notación Gu , que es equivalente a $G(q)u$. Gu corresponde a señal de salida del sistema $G(q)$ con entrada u .

Lema 7.2.1. Si G es lineal, β puede ser considerado cero sin pérdida de generalidad [71].

Demostración. Sea G un sistema pasivo. Entonces, debe existir un β mínimo, el cual se denotará $\beta_{\min} \geq 0$, que satisfaga (7.2.2) para todo $u \in \mathcal{H}_e$. Sea $u \in \mathcal{H}_e$ arbitrario y sea $1 < \alpha < \infty$. Claramente $\alpha u \in \mathcal{H}_e$, y por linealidad se tiene

$$\begin{aligned}\langle G(\alpha u), \alpha u \rangle_N &\geq -\beta_{\min} \\ \alpha^2 \langle Gu, u \rangle_N &\geq -\beta_{\min},\end{aligned}$$

con lo cual se concluye que

$$\langle Gu, u \rangle_N \geq \frac{-\beta_{\min}}{\alpha^2} \geq -\beta_{\min}. \quad (7.2.3)$$

Definiendo $\tilde{\beta}_{\min} := \alpha^{-2}\beta_{\min}$, se ha encontrado un nuevo β mínimo que satisface (7.2.2). Como α es arbitrario y $\beta \geq 0$, basta considerar el caso $\beta = 0$. \square

Ahora, se introduce una condición equivalente para definir un sistema pasivo [69]:

Teorema 7.2.1. Sea G causal, lineal y asintóticamente estable, con respuesta a impulso $\{g\}_{t \geq 0}$. G es pasivo si y sólo si $\operatorname{Re}\{G(e^{j\omega})\} \geq 0$, para todo $\omega \in [0, 2\pi)$.

Demostración. La demostración se basa en el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\{\langle g * u, u \rangle_N\} &= \langle g * u, u \rangle_N \stackrel{(a)}{=} \langle g * u, u_N \rangle \\ &\stackrel{(b)}{=} \langle g * u_N, u_N \rangle \\ &\stackrel{(c)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(e^{j\omega}) |U_N(e^{j\omega})|^2 d\omega \\ &\stackrel{(d)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re}\{G(e^{j\omega})\} |U_N(e^{j\omega})|^2 d\omega,\end{aligned} \quad (7.2.4)$$

donde se tiene (a) por (7.2.1), (b) por causalidad de G , (c) por la relación de Plancherel/teorema de Parseval [39, 72], y (d) por aplicación del operador $\operatorname{Re}\{\}$ a ambos lados de la ecuación.

Dado que $u \in \mathcal{H}_e$ es arbitrario, $U_N(e^{j\omega})$ es arbitrario y por ende $\langle g * u, u \rangle_N \geq 0$ es equivalente a $\operatorname{Re}\{G(e^{j\omega})\} \geq 0$ por (7.2.4). \square

Observación 7.2.1. Note que la estabilidad asintótica es necesaria para la convergencia de la integral dada por el teorema de Parseval, tal como se explica en [73].

7.3. Caracterización de sistemas lineales pasivos

Una importante contribución a la teoría y características de los sistemas pasivos y disipativos es la propiedad de Kalman-Yakubovich-Popov, también llamado lema KYP o para el caso lineal, *Positive Real Lemma*. Este lema entrega condiciones necesarias y suficientes que describen un sistema pasivo.

El lema que se describirá a continuación relaciona las condiciones que debe cumplir un sistema pasivo, con funciones de transferencia reales positivas (*positive real transfer functions*). Para el caso de interés en este trabajo, el caso discreto, el lema es propuesto en [74].

Se considera el sistema discreto lineal e invariante en el tiempo dado por la representación en variables de estado

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k \quad (7.3.1)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k. \quad (7.3.2)$$

La función de transferencia asociada es

$$G(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}.$$

Se supone que el sistema descrito en (7.3.1)-(7.3.2) es controlable y observable²

Teorema 7.3.1. (Hitz y Anderson, 1969, caso SISO) [74] Sea $G(z)$ función de transferencia real racional en z sin polos en $|z| > 1$ y sólo con polos simples en $|z| = 1$, y sea $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ una realización mínima³ de $G(z)$. Si para $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ existe una matriz real, simétrica y positiva definida \mathbf{P} y matrices reales \mathbf{L} y \mathbf{W} tal que

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} - \mathbf{P} = -\mathbf{L} \mathbf{L}^T \quad (7.3.3)$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{B} = \mathbf{C}^T - \mathbf{L} \mathbf{W} \quad (7.3.4)$$

$$\mathbf{W}^T \mathbf{W} = (\mathbf{D} + \mathbf{D}^T) - \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B}, \quad (7.3.5)$$

entonces la función de transferencia $G(z)$ es real positiva discreta, es decir, satisface las condiciones

1. $G(z)$ es analítica en $|z| > 1$, y
2. $G\left(\frac{1}{z}\right) + G(z) \geq 0$ en $|z| > 1$.
3. Si G tiene polos simples en $|z| = 1$, el residuo asociado a cada polo simple es positivo.

Por otra parte, si $G(z)$ es real positiva discreta, entonces para cualquier realización mínima de $G(z)$, existe $\mathbf{P} > 0$, \mathbf{L} , \mathbf{W} que satisfacen las condiciones (7.3.3), (7.3.4) y (7.3.5).

Por el teorema del módulo máximo de variable compleja [45] la condición 2 del teorema anterior es equivalente a

$$G(e^{-j\omega}) + G(e^{j\omega}) \geq 0 \quad (7.3.6)$$

para todo $\omega \in [0, 2\pi)$ tal que $G(z)$ no tiene polos en $|z| = 1$ [74].

De esta forma, un sistema lineal, causal, pasivo y asintóticamente estable tiene función de transferencia real racional $G(z)$ que es real positiva discreta. Esto dado que es analítica en $|z| > |p_{max}|$, $1 > |p_{max}|$ producto de que es asintóticamente estable, y se satisface (7.3.6) por el Teorema 7.2.1.

A su vez, una función de transferencia causal $G(z)$ real positiva discreta y asintóticamente estable proviene de un sistema pasivo tal como fue definido en (7.2.2) con $\beta = 0$. Más sobre esta equivalencia se puede encontrar en [41], donde se aclara que una propiedad de entrada-salida de un sistema

²Por *controlable* se refiere a si es posible obtener una secuencia $\{u_k\}$ tal que un estado \mathbf{x}_k arbitrario pueda conseguirse a partir de cualquier estado inicial en un tiempo finito. Por otra parte, *observable* indica si es posible reconstruir el estado inicial de un sistema a partir de un número finito de datos de entrada y salida [44].

³Una realización mínima es una descripción en variables de estado $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ que es controlable y observable [75, 76].

pasivo es su real positividad. Es decir, un sistema pasivo es real positivo. Si además el sistema es lineal, controlable y observable, ambos conceptos son equivalentes.

Existe bastante literatura respecto a funciones y sistemas reales positivos. El interés de estudiar este tipo de sistemas, reside en las implicancias de éstos en la teoría de estabilidad, y los problemas de pasividad relacionados con ellos. Un ejemplo de la motivación detrás de este tema es que es posible garantizar estabilidad robusta en un lazo cerrado de control dada una función de transferencia de lazo cerrado adecuada, estrictamente real positiva [77].

Propiedades relevantes de los sistemas reales positivos se detallan en [78]. Se destacan algunas de éstas en el siguiente lema.

Lema 7.3.1. *Considérese una función de transferencia $H(z)$ asintóticamente estable y de fase mínima. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(a) *La función de transferencia $H(z)$ es real positiva.*

(b) $|z| \geq 1 \implies |\angle H(z)| \leq \frac{\pi}{2}$, donde $\angle H(z)$ es el ángulo de la función de variable compleja $H(z)$.

(c) $\frac{1}{H(z)}$ es real positiva.

(d) $\alpha H(z)$ es real positiva para todo $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Además, la suma de dos funciones de transferencia $H_1(z)$ y $H_2(z)$ reales positivas es real positiva.

Demostración. Sea $H(z)$ una función de transferencia real positiva. Expresando $H(z)$ en su forma polar,

$$\operatorname{Re}\{H(z)\} = \operatorname{Re}\{|H(z)|e^{j\angle H(z)}\} = |H(z)| \cos(\angle H(z)) \geq 0 \iff |\angle H(z)| \leq \frac{\pi}{2}, \quad (7.3.7)$$

con lo cual se demuestra (a) \iff (b). Nuevamente suponiendo que $H(z)$ es una función de transferencia real positiva,

$$\left| \angle \frac{1}{H(z)} \right| = |-\angle H(z)| = |\angle H(z)| \leq \frac{\pi}{2}. \quad (7.3.8)$$

Es decir, (a) \iff (c). Por otra parte, (a) \iff (d) es trivial pues un escalamiento real no afecta la fase de $H(z)$. Finalmente, sea $H(z)$ la suma de $H_1(z)$ y $H_2(z)$. Nótese que $H(z)$ es asintóticamente estable. Además,

$$\operatorname{Re}\{H(z)\} = \operatorname{Re}\{H_1(z)\} + \operatorname{Re}\{H_2(z)\} \geq 0, \quad (7.3.9)$$

pues $\operatorname{Re}\{H_1(z)\}$ y $\operatorname{Re}\{H_2(z)\}$ son mayor o igual a cero para todo valor de $|z| = 1$. \square

Además de lo anterior, es posible establecer una relación entre las funciones reales positivas, y las funciones reales acotadas. La función que relaciona ambos conceptos es la función de *scattering* [73]. La función de scattering de un sistema con función de transferencia $H(z)$ está dada por

$$S(z) := \frac{H(z) - 1}{1 + H(z)}. \quad (7.3.10)$$

Así, se tiene el siguiente teorema [73]:

Teorema 7.3.2. *Considérese la función de transferencia en tiempo discreto $H(z)$ sin polos en $|z| \geq 1$, y la función de scattering dada por (7.3.10). Entonces, el sistema es pasivo si y sólo si $|S(e^{j\omega})| \leq 1$ para todo $\omega \in [0, 2\pi)$.*

Demostración. Considérese el siguiente cálculo:

$$|S(e^{j\omega})|^2 = \frac{|H(e^{j\omega}) - 1|^2}{|H(e^{j\omega}) + 1|^2} \quad (7.3.11)$$

$$= \frac{|H(e^{j\omega})|^2 - 2\operatorname{Re}\{H(e^{j\omega})\} + 1}{|H(e^{j\omega})|^2 + 2\operatorname{Re}\{H(e^{j\omega})\} + 1} \quad (7.3.12)$$

$$= 1 - \frac{4\operatorname{Re}\{H(e^{j\omega})\}}{|H(e^{j\omega}) + 1|^2}. \quad (7.3.13)$$

Entonces, es claro que $|S(e^{j\omega})| \leq 1$ si y sólo si $\operatorname{Re}\{H(e^{j\omega})\} \geq 0$. Dado que la función de transferencia $H(z)$ es asintóticamente estable, la condición obtenida es necesaria y suficiente para que el sistema dado por $H(z)$ sea pasivo. \square

El resultado anterior tiene directa relación con las funciones de transferencia reales acotadas, pues bajo las condiciones del teorema anteriormente demostrado, $S(e^{j\omega})$ es una función real acotada. Note además que la transformación $H(z) \rightarrow S(z)$ es una transformación de Möbius o transformación bilineal [79], por lo que es posible demostrar que las rectas $\operatorname{Re}\{H(z)\} = \delta \geq 0$ se mapean a circunferencias dentro del círculo unitario para $S(z)$:

Lema 7.3.2. *Las rectas $\operatorname{Re}\{H(z)\} = \delta \geq 0$ se mapean a circunferencias de radio $\frac{1}{1+\delta}$ y centro $(\frac{\delta}{1+\delta}, 0)$ para $S(z)$.*

Demostración. Gracias a (7.3.10), se puede expresar $H(z)$ como

$$H(z) = \frac{S(z) + 1}{1 - S(z)}. \quad (7.3.14)$$

Entonces, evaluando la recta $\operatorname{Re}\{H(z)\} = \delta$ con $\delta \geq 0$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{H(z)\} = \delta &= \operatorname{Re} \left\{ \frac{(S(z) + 1)(1 - S(z)^*)}{(1 - S(z))(1 - S(z)^*)} \right\} \\ &= \frac{1}{|1 - S(z)|^2} \operatorname{Re}\{1 - |S(z)|^2 + S(z) - S(z)^*\} \\ &= \frac{1 - |S(z)|^2}{|1 - S(z)|^2}. \end{aligned}$$

Descomponiendo $S(z)$ en partes real e imaginaria, se obtiene la expresión

$$\delta = \frac{1 - \operatorname{Re}\{S(z)\}^2 - \operatorname{Im}\{S(z)\}^2}{(1 - \operatorname{Re}\{S(z)\})^2 + \operatorname{Im}\{S(z)\}^2}, \quad (7.3.15)$$

la cual se puede expresar como

$$\left(\operatorname{Re}\{S(z)\} - \frac{\delta}{1+\delta} \right)^2 + \operatorname{Im}\{S(z)\}^2 = \frac{1}{(1+\delta)^2}, \quad (7.3.16)$$

que corresponde a una circunferencia de radio $\frac{1}{1+\delta}$ y centro $(\frac{\delta}{1+\delta}, 0)$. \square

Con el Teorema 7.3.1 en conjunto con los lemas presentados en esta sección, se ha obtenido una relación entre los sistemas lineales pasivos y estables con las funciones reales positivas. Lo anterior

entrega una forma fácil de caracterizar un sistema pasivo en tiempo discreto. Ahora, nos interesa estudiar sistemas discretos que provienen de un sistema en tiempo continuo que se discretiza bajo un método particular. En la próxima sección se recopilan algunos resultados anteriormente obtenidos en la literatura, en conjunto con nuevas perspectivas para abordar el tema presentado.

7.4. Pasividad por discretización

Para tener una idea más clara sobre la estructura de los sistemas lineales discretos pasivos, se debe tener en consideración el efecto del muestreo sobre la propiedad de pasividad de un sistema. Esto se estudia extensamente en esta sección.

Si bien el tema de discretización no pareciera a primera vista ser principal en la tesis presentada, sus implicaciones son trascendentales en los alcances de los resultados obtenidos. Dado que la imposición de pasividad en este trabajo se hace en tiempo discreto, se deben distinguir dos posibles casos en la práctica:

- **Caso 1:** A partir de un sistema pasivo en tiempo continuo, se quiere forzar pasividad en la estimación en tiempo discreto.
- **Caso 2:** A partir de un sistema en tiempo continuo, al discretizar *se sabe* que corresponde a un sistema pasivo en tiempo discreto.

Estos dos casos no son equivalentes ni excluyentes. El primer punto enfrenta la complicación de la pérdida de pasividad por discretización. Por otra parte, en el segundo caso el problema de discretización se puede ignorar para efectos de identificación, dado que en la estimación por ETFE debe forzarse pasividad en el modelo discreto, el cual ya se conoce pasivo. El caso 2 es el caso ideal para estudiar imposición de pasividad. Lamentablemente, es el menos común, pues es normal estudiar en primer lugar la pasividad en tiempo continuo, posiblemente a partir de las propiedades físicas del sistema, para luego discretizar. Es de interés en este trabajo entonces, tener en cuenta qué casos son abarcables por el método, y en cuáles tiene realmente sentido imponer pasividad en tiempo discreto. Lo anterior entrega los alcances naturales de las estrategias propuestas en las secciones siguientes.

7.4.1. Preservación de pasividad

Para analizar el primer caso, es esencial abordar bajo qué condiciones de discretización se puede preservar la propiedad de pasividad. En este tema, hay bastante literatura asociada, como [80], [40], [81] y [82]. En particular, [82] recopila algunas conclusiones en esta materia, señalando que hay algunos métodos de discretización que preservan pasividad, y otros que no.

Generalmente no se preserva pasividad bajo discretización. De hecho, en el muestreo exacto por retenedor de orden cero no se preserva pasividad. Esto es grave para los propósitos presentados en este caso, dado que el muestreo por retenedor de orden cero es una de las formas más comunes de discretizar un sistema de tiempo continuo.

Un resultado de interés se da en [83], el cual afirma que ningún sistema estrictamente propio discretizado por retenedor de orden cero es pasivo en tiempo discreto. Es decir, los sistemas pasivos en tiempo discreto tienen grado relativo 0. Este teorema se presenta como la extensión del resultado análogo en tiempo continuo: todo sistema estrictamente propio en tiempo continuo que es pasivo (real positivo), tiene grado relativo 1.

La afirmación probada en [83] y luego analizada en detalle en [84], puede comprenderse intuitivamente. Si el sistema en tiempo continuo es estrictamente propio, es claro que $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0$. Es decir, el diagrama de Nyquist de $G(s)$ contiene al origen, punto que se encuentra en el límite de la región de pasividad $\text{Re}\{G(j\omega)\} \geq 0$. Es natural pensar que producto de la discretización, el muestreo empeora la aproximación en alta frecuencia, haciendo que la respuesta en frecuencia del sistema discretizado cerca de la frecuencia de Nyquist en general pierda fase, tal como se observa en el ejemplo de la Figura 7.1, donde

$$G(s) = \frac{s + 0.7}{s^2 + 0.7s + 1}, \quad (7.4.1)$$

y $T_s = 0.3$.

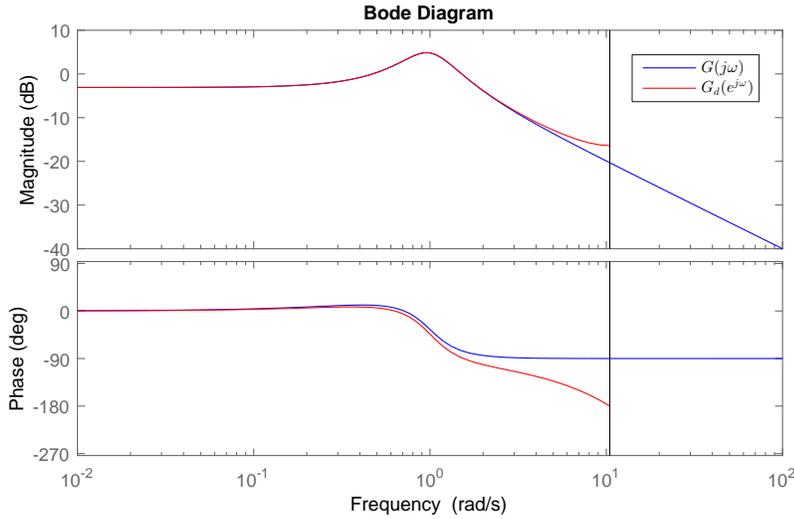


Figura 7.1: Diagrama de Bode de un sistema de segundo orden en tiempo continuo (azul), y su discretización por retenedor de orden cero (rojo).

Nótese que $|\angle G(j\omega)| \leq \frac{\pi}{2}$ y por ende el sistema $G(s)$ es pasivo. Por esta misma justificación, es claro que el sistema discretizado resultante $G_d(e^{j\omega})$ no lo es.

Por otra parte, es fácil notar intuitivamente la extensión de lo anterior para el caso de tiempo continuo. Si se tiene un sistema con grado relativo d con $d \geq 2$, para ω lo suficientemente grande puede aproximarse el sistema como Ks^{-d} , lo cual para $d \geq 2$ tiene fase con valor absoluto mayor que $\frac{\pi}{2}$.

En resumen, se concluye que el único caso donde se puede preservar pasividad es cuando $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = D \neq 0$. Resultados para este caso se encuentran en [85], en donde se resalta que si se tiene un sistema pasivo en tiempo continuo escrito en variables de estado con grado relativo cero, siempre existirá $\tilde{D} < \infty$ que permita a través de discretización con retenedor de orden cero obtener un sistema pasivo en tiempo discreto. Nuevamente esto tiene sentido, pues el valor D simplemente desplaza el diagrama de Nyquist hacia la derecha, haciendo que eventualmente todo el diagrama se encuentre en el semiplano derecho.

Además de aumentar la ganancia instantánea D , a continuación se conjetura otro caso que preserve pasividad a través de retenedor de orden cero. Se conjetura que si se tiene un sistema continuo estable estrictamente pasivo⁴, existe un T_s^{max} tal que para todo $T_s \in (0, T_s^{max})$, el sistema discretizado por retenedor de orden cero entrega un sistema pasivo. Lo anterior sólo puede obtenerse en sistemas pasa altos pues en caso contrario, si $G(s) \rightarrow 0$ cuando $s \rightarrow \infty$, el diagrama de Nyquist de $G(s)$ tiende al origen cuando $\omega \rightarrow \infty$, lo cual conduce a un sistema pasivo no estrictamente pasivo. Un sistema estrictamente pasivo puede construirse fácilmente a partir de un sistema pasivo sumando una constante positiva a la función de transferencia, la cual corre el diagrama de Nyquist a la derecha.

Considérese un ejemplo de lo anterior. Sea la función de transferencia

$$G(s) = 0.01 + \frac{s + 2}{(s + 1)(s + 4)}. \quad (7.4.2)$$

Esta función de transferencia en tiempo continuo es estrictamente pasiva, pues

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{G(j\omega)\} &= 0.01 + \operatorname{Re}\left\{\frac{j\omega + 2}{(j\omega + 1)(j\omega + 4)}\right\} \\ &= 0.01 + \frac{7\omega^2 + 8}{(\omega^2 + 1)(\omega^2 + 16)} \geq 0.01 > 0 \quad \text{para todo } \omega \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

El período de muestreo de la discretización se escoge tal que la frecuencia de Nyquist sea al menos 10 veces mayor que la frecuencia del polo más rápido de la planta. Es decir,

$$40 \leq \frac{\pi}{T_s} \implies T_s \leq \frac{\pi}{40} = 0.079[s].$$

En la Figura 7.2 se grafican los diagramas de Nyquist para la discretización de $G(s)$ ocupando diferentes períodos de muestreo válidos según el criterio descrito. Como se observa en la Figura 7.2,

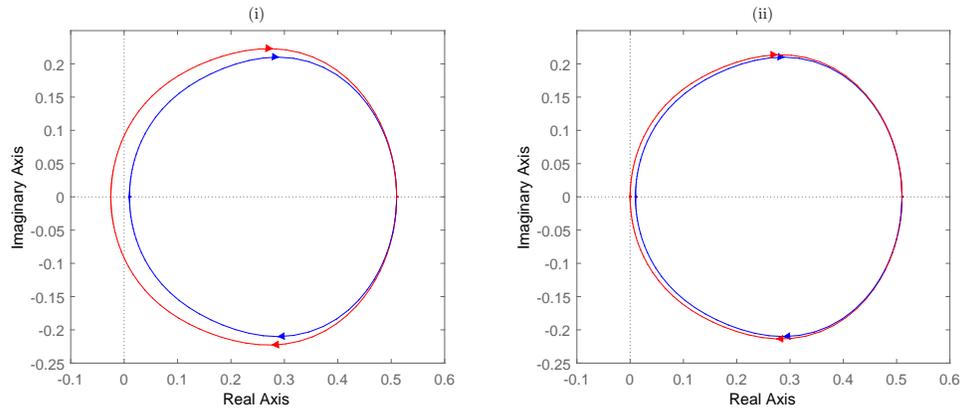


Figura 7.2: Diagramas de Nyquist para las funciones de transferencia continuas y obtenidas por discretización con retenedor de orden cero. (i) usando $T_s = 0.07$. (ii) usando $T_s = 0.02$.

al disminuir el período de muestreo la discretización por retenedor de orden cero aproxima de mejor

⁴Por estrictamente pasivo, se refiere a que un sistema $G(s)$ satisface, para algún $\delta > 0$, $\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} > \delta$ para todo $\omega \in \mathbb{R}$.

forma la figura del diagrama de Nyquist del sistema en tiempo continuo. Esto se ha estudiado en diversos ejemplos, lo cual entrega indicios sobre la veracidad de la conjetura.

Lo discutido en esta sección lamentablemente limita las opciones de forzar pasividad. Bajo la discretización con retenedor de orden cero, los sistemas pasivos que se deben considerar deben ser bipropios para que el sistema en tiempo discreto sea pasivo. Esto claramente es un problema, debido a que es bien sabido que los sistemas reales son pasa bajos. Sin embargo, es posible modelar sistemas reales como bipropios si se trabaja bajo cierto ancho de banda en donde el sistema se comporta como pasa alto o pasa todo. Para estos casos, preservación de pasividad a través de retenedor de orden cero cobra sentido.

Hasta ahora se ha estudiado solamente la discretización por retenedor de orden cero. A través del siguiente lema, se introduce una discretización conocida que sí preserva pasividad.

Lema 7.4.1. *Si se considera la discretización ocupando transformación bilineal, también llamada transformación de Tustin*

$$s = \frac{2}{T_s} \frac{z - 1}{z + 1}, \quad (7.4.3)$$

la pasividad sí se preserva.

Demostración. Sea un sistema continuo lineal y pasivo con función de transferencia $G(s)$. Por lo tanto, $G(s)$ satisface

$$\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} \geq 0, \quad \text{para todo } \omega \in \mathbb{R}. \quad (7.4.4)$$

Sea $G_d(z)$ la función de transferencia discreta obtenida por la transformación (7.4.3). Se tiene

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{G_d(e^{j\theta})\} &= \operatorname{Re}\left\{G\left(\frac{2}{T_s} \frac{e^{j\theta} - 1}{e^{j\theta} + 1}\right)\right\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{G\left(\frac{2j}{T_s} \frac{(e^{j\frac{\theta}{2}} - e^{-j\frac{\theta}{2}})}{2j}\right)\right\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{G\left(\frac{2j}{T_s} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\right\} \geq 0, \end{aligned} \quad (7.4.5)$$

donde se tiene la última desigualdad por (7.4.4). Como θ es arbitrario, el diagrama de Nyquist de $G_d(z)$ se encuentra en el semiplano derecho cerrado en z , concluyéndose que $G_d(z)$ es pasivo. \square

Observación 7.4.1. *A partir del mismo análisis del Lema 7.4.1, la forma del diagrama de Nyquist de la función de transferencia discretizada por Tustin es equivalente a la del diagrama de Nyquist del sistema de tiempo continuo.*

Veamos un ejemplo de lo anterior. Sea una función de transferencia en tiempo continuo

$$G(s) = \frac{s + a}{s^2 + as + 1}, \quad (7.4.6)$$

con $a > 0$. Esta función de transferencia estable es pasiva dado que

$$\operatorname{Re}\{G(j\omega)\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{j\omega + a}{-\omega^2 + aj\omega + 1}\right\} = \frac{a}{(1 - \omega^2)^2 + \omega^2 a^2} \geq 0, \quad \text{para todo } \omega \in \mathbb{R}. \quad (7.4.7)$$

Escogiendo a modo de ejemplo $a = 0.7$, se grafica el diagrama de Nyquist de $G(s)$ en la Figura 7.3.

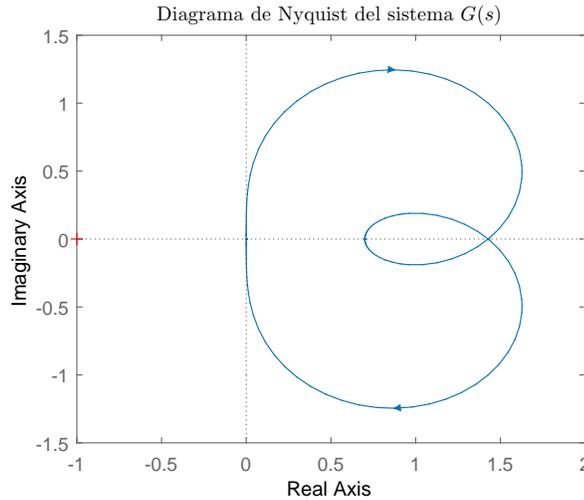


Figura 7.3: Diagrama de Nyquist del sistema pasivo $G(s)$ en Ecuación (7.4.6) con $a = 0.7$.

Claramente, el ejemplo dado satisface las propiedades de pasividad. Ahora, discretizando este modelo con retenedor de orden cero [44], y luego por Tustin (7.4.3), ambos con período de muestreo $T_s = 0.3$, se obtienen las funciones de transferencia $H_{ZOH}(z)$ y $H_{Tus}(z)$ respectivamente:

$$H_{ZOH}(z) = \frac{0.8653z - 0.4022}{z^2 - 0.8349z + 0.4966}, \quad H_{Tus}(z) = \frac{0.4219z^2 + 0.2188z - 0.2031}{z^2 - 0.9375z + 0.5625}. \quad (7.4.8)$$

Los diagramas de Nyquist de $H_{ZOH}(z)$ y $H_{Tus}(z)$ se encuentran en la Figura 7.4. En la Figura 7.4

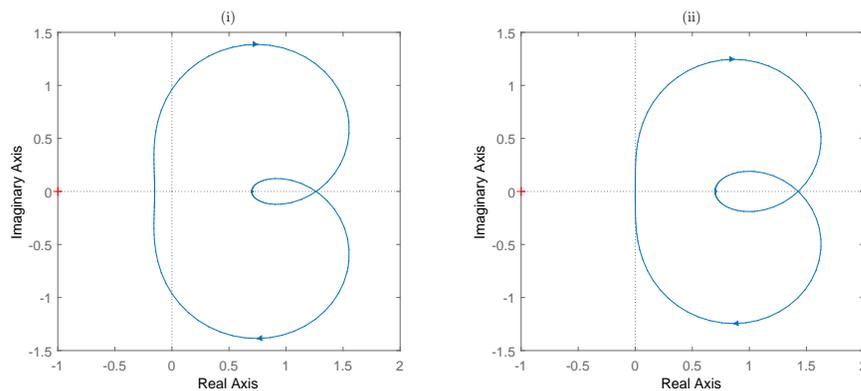


Figura 7.4: Diagramas de Nyquist para las funciones de transferencia obtenidas por discretización. (i) Discretización usando retenedor de orden cero. (ii) Discretización por Tustin.

se puede apreciar que mientras que Tustin consigue un modelo que preserva pasividad, la discretización por retenedor de orden cero no lo preserva. En línea con lo discutido en la sección 7.4,

esto puede implicar complicaciones al forzar pasividad en sistemas de tiempo discreto provenientes por discretización con retenedor de orden cero, pues la pasividad obtenida en tiempo discreto no necesariamente se prolonga a su equivalente en tiempo continuo.

En resumen, se puede obtener un sistema pasivo en tiempo discreto a partir de

- la discretización por retenedor de orden cero de un sistema pasivo con grado relativo cero y ganancia de paso directo suficientemente grande, o
- la discretización por retenedor de orden cero de un sistema estrictamente pasivo con un tiempo de muestreo suficientemente pequeño.
- la discretización por Tustin de un sistema pasivo en tiempo continuo.

Es claro que las limitaciones en imposición de pasividad son bastante más grandes que lo anteriormente estudiado con causalidad, debido a que tiene sentido imponer esta condición solamente en casos bastante específicos. Una conclusión importante de esta sección, es que no tiene mayor sentido imponer pasividad a prácticamente todos los sistemas modelados como pasabajos con retenedor de orden cero, dado que éstos si bien pueden ser pasivos en tiempo continuo, no lo son en tiempo discreto y por ende imponer esta condición es forzar propiedades falsas sobre la estimación requerida en tiempo discreto.

7.5. Ejemplos de sistemas pasivos simples

A continuación se darán ejemplos de sistemas pasivos de tiempo discreto de primer y segundo orden. Éstos se supone que han sido discretizados de forma conveniente.

Ejemplo 7.5.1. *Se considera una función de transferencia*

$$H_1(z) = \frac{z}{z-a}, \quad (7.5.1)$$

con $|a| < 1$. Este sistema es pasivo, pues

$$\operatorname{Re}\{H_1(e^{j\omega})\} = \operatorname{Re}\left\{\frac{e^{j\omega}(-a + e^{-j\omega})}{(-a + e^{j\omega})(-a + e^{-j\omega})}\right\} = \frac{1 - a \cos(\omega)}{a^2 - 2a \cos(\omega) + 1} \geq 0 \quad \forall \omega \in \mathbb{R}, \quad (7.5.2)$$

dado que $|a \cos(\omega)| < 1$ para todo $\omega \in \mathbb{R}$. El diagrama de Nyquist que comprueba pasividad se muestra en la Figura 7.5.

Nótese que el sistema dado en (7.5.1) es de primer orden y grado relativo cero, en línea con lo discutido en la Sección 7.4. Una observación interesante se da en el siguiente lema.

Lema 7.5.1. *El sistema (7.5.1) con posibles retardos, es decir, el sistema*

$$H_1(z) = \frac{z^{-\tau}}{z-a}, \quad \tau \in \mathbb{N}_0, \quad (7.5.3)$$

no es pasivo para ningún valor de $\tau \in \mathbb{N}_0$.

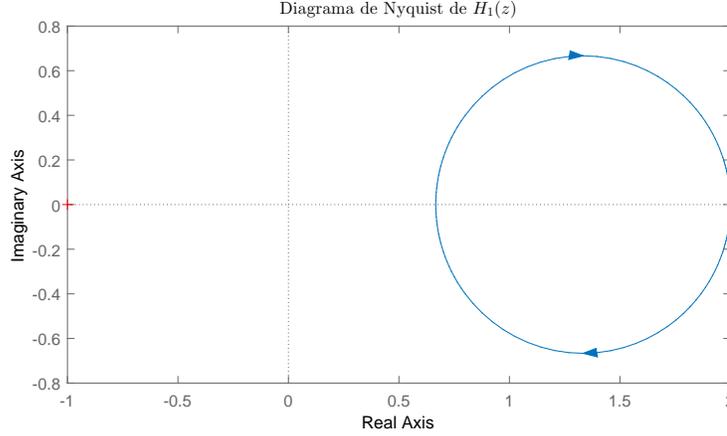


Figura 7.5: Diagrama de Nyquist del sistema pasivo $H_1(z)$ dado por (7.5.1), con $a = 0.5$.

Demostración. Obteniendo la parte real de $H_1(e^{j\omega})$,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{H_1(e^{j\omega})\} &= \operatorname{Re}\left\{\frac{e^{-j\omega\tau}}{e^{j\omega} - a}\right\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{\frac{e^{-j\omega(\tau+1)} - ae^{-j\omega\tau}}{a^2 - 2a\cos(\omega) + 1}\right\} \\ &= \frac{\cos(\omega(\tau+1)) - a\cos(\omega\tau)}{a^2 - 2a\cos(\omega) + 1}. \end{aligned} \quad (7.5.4)$$

Es posible notar que para $\omega = \frac{\pi}{\tau+1}$, el numerador de (7.5.4) es negativo:

$$\cos(\pi) - a\cos\left(\frac{\pi\tau}{\tau+1}\right) < -1 + |a| < 0, \quad (7.5.5)$$

donde se ha ocupado la desigualdad triangular [86], y el supuesto que $|a| < 1$. \square

Para sistemas de segundo orden, establecer condiciones necesarias y suficientes sobre los polos o ceros de $H(z)$ no es trivial. Para lo propuesto, sólo se considerará una condición suficiente para pasividad.

Lema 7.5.2. *Considérese una función de transferencia de segundo orden*

$$H_2(z) = \frac{z(z-c)}{(z-a)(z-b)}, \quad (7.5.6)$$

donde a, b y c son números reales con módulo menor a uno. Si $a < c < b$, entonces $H_2(z)$ es un sistema pasivo.

Demostración. Se puede escribir $H_2(z)$ como

$$H_2(z) = \left(\frac{a-c}{a-b}\right)\frac{z}{z-a} + \left(\frac{b-c}{b-a}\right)\frac{z}{z-b}. \quad (7.5.7)$$

Como las fracciones $\frac{a-c}{a-b}$ y $\frac{b-c}{b-a}$ son mayores que cero por hipótesis, los sumandos de (7.5.7) son ambas funciones de transferencia pasivas. Por las propiedades (b) y (c) de las funciones reales positivas, se obtiene que $H_2(z)$ debe ser un sistema pasivo. \square

Se considera un ejemplo del lema anterior.

Ejemplo 7.5.2. Sea la función de transferencia en tiempo discreto

$$H_2(z) = \frac{z(z - 0.7)}{(z - 0.1)(z - 0.9)}. \quad (7.5.8)$$

Esta función de transferencia satisface las condiciones del Lema (7.5.2) y por ende es un sistema pasivo en tiempo discreto. Esto se puede confirmar observando el diagrama de Nyquist de $H_2(z)$, el cual se muestra en la Figura 7.6.

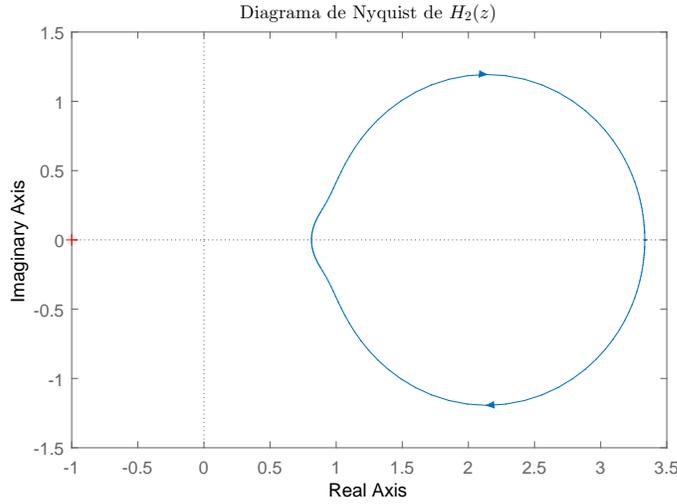


Figura 7.6: Diagrama de Nyquist del sistema pasivo $H_2(z)$ en la Ecuación (7.5.8).

7.6. Pasividad: análisis del estimador ETFE

En esta sección se hará un análisis del estimador ETFE en el dominio de la frecuencia, con el propósito de relacionar los resultados obtenidos con los conceptos de pasividad anteriormente estudiados.

Se estudia el siguiente sistema de tiempo discreto, lineal e invariante en el tiempo

$$y_t = G_0(q)u_t + v_t, \quad t = 1, \dots, N,$$

donde $\{v_t\}$ es un proceso de ruido blanco de media cero y varianza σ^2 , y donde se supone $G_0(q)$ asintóticamente estable. Sujeto a condiciones iniciales iguales a cero, se obtiene el estimador ETFE como

$$\hat{G}(e^{j\omega}) = \frac{Y_N(e^{j\omega})}{U_N(e^{j\omega})} = \frac{G_0^N(e^{j\omega})U_N(e^{j\omega}) + M_N(e^{j\omega}) + V_N(e^{j\omega})}{U_N(e^{j\omega})}$$

$$= G_0^N(e^{j\omega}) + \frac{M_N(e^{j\omega}) + V_N(e^{j\omega})}{U_N(e^{j\omega})}, \quad (7.6.1)$$

donde $G_0^N(e^{j\omega})$ y $M_N(e^{j\omega})$ se encuentran definidos en (3.2.5). Durante las próximas subsecciones, se estudiarán formas de expresar la parte real de $\hat{G}(e^{j\omega})$ pues es la que tiene directa relación con la pasividad del estimador. Con esto, se espera conocer más sobre sus propiedades de media y covarianza.

7.6.1. Primer análisis de $\text{Re}\{\hat{G}(e^{j\omega})\}$

Por (3.2.20), se puede expresar el estimador ETFE como

$$\hat{G}(e^{j\omega}) = G_0(e^{j\omega}) + \sum_{t=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N (m_k + v_k) \alpha_{t-k} e^{-j\omega t}.$$

Por lo tanto, aplicando el operador parte real, se obtiene

$$\text{Re}\{\hat{G}(e^{j\omega})\} = \text{Re}\{G_0(e^{j\omega})\} + \sum_{t=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N (m_k + v_k) \alpha_{t-k} \cos(\omega t). \quad (7.6.2)$$

Para el estudio de la respuesta en frecuencia, es común considerar sólo N puntos de ésta, al determinar la ETFE como cociente de la DFT (*Discrete Fourier Transform*, [39]) entre la salida, y la entrada. Entonces, se estudiará la discretización de la estimación con $\omega = \frac{2\pi p}{N}$, con $p = \{0, 1, \dots, N-1\}$.

Se estudian a continuación las propiedades de media y covarianza de la parte real de la respuesta en frecuencia estimada por ETFE.

- Media:

$$\begin{aligned} E\{\text{Re}\{\hat{G}(e^{\frac{j2\pi p}{N}})\}\} &= E\left\{\text{Re}\{G_0(e^{\frac{j2\pi p}{N}})\} + \sum_{t=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N (m_k + v_k) \alpha_{t-k} \cos\left(\frac{2\pi p t}{N}\right)\right\} \\ &= \text{Re}\{G_0(e^{\frac{j2\pi p}{N}})\} + \sum_{t=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N m_k \alpha_{t-k} \cos\left(\frac{2\pi p t}{N}\right) + \sum_{t=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N E\{v_k\} \alpha_{t-k} \cos\left(\frac{2\pi p t}{N}\right) \\ &= \text{Re}\{G_0(e^{\frac{j2\pi p}{N}})\} + \sum_{t=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N m_k \alpha_{t-k} \cos\left(\frac{2\pi p t}{N}\right), \end{aligned}$$

donde la secuencia $\{\alpha_k\}$ satisface (3.2.19).

- Matriz de covarianza: Se sabe que el error de estimación está dado por

$$e_p = \text{Re}\{\hat{G}(e^{\frac{j2\pi p}{N}})\} - E\{\text{Re}\{\hat{G}(e^{\frac{j2\pi p}{N}})\}\} = \sum_{t=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N v_k \alpha_{t-k} \cos\left(\frac{2\pi p t}{N}\right),$$

para $p = 0, 1, \dots, N-1$. Sin embargo, por paridad sólo es de utilidad estimar los valores de la respuesta en frecuencia desde $p = 0$ hasta $p = \frac{N}{2}$. Notando que $\cos\left(\frac{2\pi p t}{N}\right) = \cos\left(\frac{2\pi p(nN+t)}{N}\right)$ para n entero, se puede escribir e_p como

$$e_p = \sum_{t=0}^{N-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^N v_k \alpha_{nN+t-k} \cos\left(\frac{2\pi p t}{N}\right). \quad (7.6.3)$$

Ahora, si se supone que α_k decae a cero para valores de k grandes, se puede aproximar (7.6.3) si se consideran solamente los primeros $2\rho + 1$ términos centrales de $\{\alpha_k\}$:

$$\begin{aligned} e_p &\approx \sum_{t=0}^{N-1} \sum_{n=-\rho}^{\rho} \sum_{k=1}^N v_k \alpha_{nN+t-k} \cos\left(\frac{2\pi pt}{N}\right) \\ &= \sum_{t=0}^{N-1} \sum_{k=1}^N v_k \sum_{n=-\rho}^{\rho} \alpha_{nN+t-k} \cos\left(\frac{2\pi pt}{N}\right), \end{aligned}$$

donde $\rho \in \mathbb{N}$.

Para obtener la matriz de covarianza de los errores de estimación de la respuesta en frecuencia, se puede escribir el error en forma matricial como

$$\mathbf{e} = \mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{v}, \quad (7.6.4)$$

con

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ \vdots \\ e_{\frac{N}{2}} \end{bmatrix}, \quad (7.6.5)$$

donde \mathbf{S} es una matriz de dimensiones $(\frac{N}{2} + 1) \times N$ con elementos dados por

$$[\mathbf{S}]_{i,k} = \cos\left(\frac{2\pi(i-1)(k-1)}{N}\right), \quad (7.6.6)$$

y donde \mathbf{A} es una matriz de Toeplitz de dimensiones $N \times N$ cuyos elementos son

$$[\mathbf{A}]_{i,k} = \sum_{n=-\rho}^{\rho} \alpha_{nN-1+i-k}, \quad i, k = 1, \dots, N. \quad (7.6.7)$$

Así, se obtiene la aproximación de la matriz de covarianza $\text{cov}(\mathbf{e})$

$$\text{cov}(\mathbf{e}) \approx \mathbb{E}\{\mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{v}\mathbf{v}^T \mathbf{A}^T \mathbf{S}^T\} = \mathbf{S}\mathbf{A}\mathbb{E}\{\mathbf{v}\mathbf{v}^T\} \mathbf{A}^T \mathbf{S}^T = \sigma^2 \mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{A}^T \mathbf{S}^T. \quad (7.6.8)$$

Lamentablemente, si se quisiera determinar la matriz $\text{cov}(\mathbf{e})$ de forma exacta, se requieren potencialmente infinitos coeficientes de la serie de Laurent de $z^N (U_N(z))^{-1}$, lo cual en general no es posible calcular con herramientas de software. Si bien se considera válida esta forma de obtener $\text{cov}(\mathbf{e})$, se estudia a continuación un método alternativo para determinar esta matriz, ahora sin truncamientos.

7.6.2. Segundo análisis de $\text{Re}\{\hat{G}(e^{j\omega})\}$

Se considera en este caso la ecuación (7.6.1). Dado que interesa conocer la parte real del estimador ETFE, por (7.6.1), haciendo $\omega = \frac{2\pi p}{N}$, se puede expresar

$$\text{Re}\{\hat{G}(e^{j\frac{2\pi p}{N}})\} = \text{Re}\left\{G_0(e^{j\frac{2\pi p}{N}}) + \frac{M_N(e^{j\frac{2\pi p}{N}})}{U_N(e^{j\frac{2\pi p}{N}})}\right\} + \text{Re}\left\{\frac{V_N(e^{j\frac{2\pi p}{N}})}{U_N(e^{j\frac{2\pi p}{N}})}\right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Re} \left\{ G_0(e^{j\frac{2\pi p}{N}}) + \frac{M_N(e^{j\frac{2\pi p}{N}})}{U_N(e^{j\frac{2\pi p}{N}})} \right\} + \operatorname{Re} \left\{ \frac{V_N(e^{j\frac{2\pi p}{N}})\overline{U}_N(e^{j\frac{2\pi p}{N}})}{|U_N(e^{j\frac{2\pi p}{N}})|^2} \right\} \\
&= \operatorname{Re} \left\{ G_0(e^{j\frac{2\pi p}{N}}) + \frac{M_N(e^{j\frac{2\pi p}{N}})}{U_N(e^{j\frac{2\pi p}{N}})} \right\} + \frac{1}{|U_N(e^{j\frac{2\pi p}{N}})|^2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N v_k e^{-j\frac{2\pi kp}{N}} \sum_{t=1}^N u_t e^{j\frac{2\pi tp}{N}} \right\}.
\end{aligned} \tag{7.6.9}$$

Nótese que al hacer el cambio de variable $r = N - t + 1$, es posible escribir $\overline{U}_N(e^{j\frac{2\pi p}{N}})$ como

$$\begin{aligned}
\overline{U}_N(e^{j\frac{2\pi p}{N}}) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N u_t e^{j\frac{2\pi tp}{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{r=1}^N u_{N-r+1} e^{j\frac{2\pi(N-r+1)p}{N}} \\
&= \frac{e^{j\frac{2\pi p}{N}}}{\sqrt{N}} \sum_{r=1}^N u_{N-r+1} e^{-j\frac{2\pi rp}{N}}.
\end{aligned}$$

Para facilitar el cálculo, se define $\tilde{u}_t = u_{N-t+1}$, $t = 1, 2, \dots, N$ periódica de período N . Así, por la propiedad de convolución periódica de la DFT [39], se tiene

$$\begin{aligned}
V_N(e^{j\frac{2\pi p}{N}})\overline{U}_N(e^{j\frac{2\pi p}{N}}) &= \frac{e^{j\frac{2\pi p}{N}}}{N} \sum_{k=1}^N v_k e^{-j\frac{2\pi kp}{N}} \sum_{r=1}^N \tilde{u}_r e^{-j\frac{2\pi rp}{N}} \\
&= \frac{e^{j\frac{2\pi p}{N}}}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N v_m \tilde{u}_{k-m} e^{-j\frac{2\pi kp}{N}} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N v_m u_{N-k+m+1} e^{-j\frac{2\pi(k-1)p}{N}}.
\end{aligned} \tag{7.6.10}$$

Entonces, reemplazando (7.6.10) en (7.6.9),

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\{\hat{G}(e^{j\frac{2\pi p}{N}})\} &= \operatorname{Re} \left\{ G_0(e^{j\frac{2\pi p}{N}}) + \frac{M_N(e^{j\frac{2\pi p}{N}})}{U_N(e^{j\frac{2\pi p}{N}})} \right\} + \frac{1}{|U_N(e^{j\frac{2\pi p}{N}})|^2} \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N v_m u_{N-k+m+1} e^{-j\frac{2\pi(k-1)p}{N}} \right\} \\
&= \operatorname{Re} \left\{ G_0(e^{j\frac{2\pi p}{N}}) + \frac{M_N(e^{j\frac{2\pi p}{N}})}{U_N(e^{j\frac{2\pi p}{N}})} \right\} + \frac{1}{N|U_N(e^{j\frac{2\pi p}{N}})|^2} \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N v_m u_{N-k+m+1} \cos\left(\frac{2\pi(k-1)p}{N}\right).
\end{aligned} \tag{7.6.11}$$

La clara ventaja que tiene la representación en (7.6.11) en comparación con (7.6.2), es que no requiere de los coeficientes α_k dados por la serie de Laurent de $z^N(U_N(z))^{-1}$. Este cálculo se ve reemplazado por el cálculo del módulo al cuadrado de $U_N(e^{j\frac{2\pi p}{N}})$, lo cual es fácil de implementar por software como MATLAB. Nótese que la señal u_t se debe considerar periódica de período N . Esto se hace únicamente para facilitar los cálculos asociados, y no tiene relación con periodicidad de la entrada al sistema real.

Ya obtenido el desarrollo de $\operatorname{Re}\{\hat{G}(e^{j\frac{2\pi p}{N}})\}$ que se buscaba, nuevamente se analiza la media y covarianza de $\operatorname{Re}\{\hat{G}(e^{j\frac{2\pi p}{N}})\}$, esta vez con la expresión dada por (7.6.11).

■ Media:

$$\operatorname{E}\{\operatorname{Re}\{\hat{G}(e^{j\frac{2\pi p}{N}})\}\} = \operatorname{E} \left\{ \operatorname{Re} \left\{ G_0(e^{j\frac{2\pi p}{N}}) + \frac{M_N(e^{j\frac{2\pi p}{N}})}{U_N(e^{j\frac{2\pi p}{N}})} \right\} + \frac{1}{N|U_N(e^{j\frac{2\pi p}{N}})|^2} \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N v_m u_{N-k+m+1} \cos\left(\frac{2\pi(k-1)p}{N}\right) \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \operatorname{Re} \left\{ G_0(e^{j\frac{2\pi p}{N}}) + \frac{M_N(e^{j\frac{2\pi p}{N}})}{U_N(e^{j\frac{2\pi p}{N}})} \right\} + \frac{1}{N|U_N(e^{j\frac{2\pi p}{N}})|^2} \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N E\{v_m\} u_{N-k+m+1} \cos\left(\frac{2\pi(k-1)p}{N}\right) \\
&= \operatorname{Re} \left\{ G_0(e^{j\frac{2\pi p}{N}}) + \frac{M_N(e^{j\frac{2\pi p}{N}})}{U_N(e^{j\frac{2\pi p}{N}})} \right\}.
\end{aligned}$$

Recuérdese que bajo suposiciones razonables, dadas en la sección 3.2, el módulo de $M_N(e^{j\frac{2\pi p}{N}})$ tiende a cero a medida que $N \rightarrow \infty$, y por lo tanto, la parte real de $\hat{G}(e^{j\frac{2\pi p}{N}})$ es un estimador asintóticamente no sesgado.

Sin embargo, se debe notar que para N finito en promedio las estimaciones se encontrarán sesgadas por el término $\frac{M_N(e^{j\frac{2\pi p}{N}})}{U_N(e^{j\frac{2\pi p}{N}})}$. Este término puede provocar que la estimación de la respuesta en frecuencia en media no sea pasiva, pese a que las estimaciones provengan de un sistema pasivo en tiempo discreto. Esto se observará en la sección siguiente en simulación.

- Matriz de covarianza: El error de estimación está dado por

$$e_p = \operatorname{Re}\{\hat{G}(e^{j\frac{2\pi p}{N}})\} - E\{\operatorname{Re}\{\hat{G}(e^{j\frac{2\pi p}{N}})\}\} = \frac{1}{N|U_N(e^{j\frac{2\pi p}{N}})|^2} \sum_{k=1}^N \sum_{m=1}^N v_m u_{N-k+m+1} \cos\left(\frac{2\pi(k-1)p}{N}\right), \quad (7.6.12)$$

donde $p = 0, 1, \dots, \frac{N}{2}$. Para obtener la matriz de covarianza de los errores de estimación de la respuesta en frecuencia, se puede escribir el error en forma matricial como

$$\mathbf{e} = \frac{1}{N} \operatorname{diag}(|\mathbf{U}_N|^{-2}) \mathbf{S} \tilde{\mathbf{v}}, \quad (7.6.13)$$

con \mathbf{e} y \mathbf{S} descritos en (7.6.5) y (7.6.6) respectivamente y $\operatorname{diag}(|\mathbf{U}_N|^{-2})$ matriz diagonal de tamaño $(1 + \frac{N}{2}) \times (1 + \frac{N}{2})$ formada por los elementos $\operatorname{diag}(|\mathbf{U}_N|^{-2})_{k,k} = |U_N(e^{j\frac{2\pi(k-1)}{N}})|^{-2}$, $k = 1, 2, \dots, \frac{N}{2} + 1$. Por otra parte, $\tilde{\mathbf{v}}$ es un vector con elementos dados por

$$\tilde{v}_k = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N v_m u_{N-k+m+1}, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (7.6.14)$$

Este vector también se puede expresar convenientemente como

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{W} \mathbf{v}, \quad (7.6.15)$$

donde \mathbf{v} se encuentra definido en (3.3.4), y \mathbf{W} es una matriz circulante [87] con vector generador u_t para $t = 1, 2, \dots, N$, es decir

$$[\mathbf{W}]_{i,k} = \begin{cases} u_{k-i+1}, & k \geq i \\ u_{N+k-i+1}, & k < i. \end{cases} \quad (7.6.16)$$

Así, se obtiene la matriz de covarianza $\operatorname{cov}(\mathbf{e})$ como

$$\operatorname{cov}(\mathbf{e}) = E\{\mathbf{e}\mathbf{e}^T\} = \frac{1}{N^2} \operatorname{diag}(|\mathbf{U}_N|^{-2}) \mathbf{S} \mathbf{W} E\{\mathbf{v}\mathbf{v}^T\} \mathbf{W}^T \mathbf{S}^T \operatorname{diag}(|\mathbf{U}_N|^{-2})$$

$$= \frac{\sigma^2}{N^2} \text{diag}(|\mathbf{U}_N|^{-2}) \mathbf{S} \mathbf{W} \mathbf{W}^T \mathbf{S}^T \text{diag}(|\mathbf{U}_N|^{-2}). \quad (7.6.17)$$

De esta forma se ha obtenido la expresión exacta de la matriz de covarianza del estimador de la parte real de la respuesta en frecuencia $\hat{G}(e^{j\frac{2\pi p}{N}})$.

Un resultado de interés se puede desprender de (7.6.17). Si la secuencia de entrada u_t corresponde a una realización de un ruido blanco independiente de v_t , el periodograma $|U_N(e^{j\frac{2\pi p}{N}})|^2$ es una función errática que en promedio se asemeja a $\phi_u(\omega)$. Si se supone que $\phi_u(\omega) = \sigma_u^2$, la matriz formada por la secuencia de entrada $\mathbf{W} \mathbf{W}^T$ tiene elementos aproximadamente dados por

$$\begin{aligned} (\mathbf{W} \mathbf{W}^T)_{i,k} &= \sum_{l=1}^N u_{N+l-i+1} u_{N+l-k+1} \\ &\approx N \hat{R}_u(i-k) \\ &\approx N \sigma_u^2 \delta(i-k). \end{aligned} \quad (7.6.18)$$

Entonces, para N grande, $\mathbf{W} \mathbf{W}^T$ es aproximadamente diagonal. Por otra parte, La matriz $\mathbf{S} \mathbf{S}^T$ tiene elementos

$$\begin{aligned} (\mathbf{S} \mathbf{S}^T)_{i,k} &= \sum_{l=1}^N \cos\left(\frac{2\pi(i-1)(l-1)}{N}\right) \cos\left(\frac{2\pi(k-1)(l-1)}{N}\right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=1}^N \left(\cos\left(\frac{2\pi(i-k)(l-1)}{N}\right) + \cos\left(\frac{2\pi(i+k-2)(l-1)}{N}\right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left\{ \sum_{l=1}^N e^{\frac{2\pi j(i-k)(l-1)}{N}} + \sum_{l=1}^N e^{\frac{2\pi j(i+k-2)(l-1)}{N}} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \{ N \delta(i-k) + N \delta(i+k-2) \} \\ &= \frac{N}{2} (\delta(i-k) + \delta(i+k-2)). \end{aligned} \quad (7.6.19)$$

Como $i, k \geq 1$, el cálculo en (7.6.19) indica que $\mathbf{S} \mathbf{S}^T$ es diagonal. Tiene términos $\frac{N}{2}$ en su diagonal, salvo el primer término de la matriz, que vale N . Este resultado también se puede justificar considerando la matriz \mathbf{S} de forma similar a la matriz de transformada de cosenos discreta (DCT) [88], sabiendo que la matriz de esta transformación es ortogonal.

Entonces, como $\mathbf{W} \mathbf{W}^T$ tiende a una matriz diagonal, $\mathbf{S} \mathbf{W} \mathbf{W}^T \mathbf{S}^T$ también será casi diagonal para N grande, y por lo tanto $\text{cov}(\mathbf{e})$ tiende a una matriz diagonal. Es decir, para las condiciones presentadas, las estimaciones de la parte real de $G_0(e^{j\omega})$ son no correlacionadas. Esto concuerda con la intuición, dado que es sabido que bajo suposiciones similares a las dadas, los puntos de la respuesta en frecuencia estimados por ETFE están asintóticamente no correlacionados [4]. Nótese además que el factor $\frac{1}{N^2}$ en $\text{cov}(\mathbf{e})$ se cancela con las ganancias dadas por la diagonal de $\mathbf{S} \mathbf{W} \mathbf{W}^T \mathbf{S}^T$, la cual es del orden N^2 . Así, es posible concluir un resultado ya conocido: a medida que $N \rightarrow \infty$, las varianzas de los términos estimados no tienden a cero. Es decir, $\text{Re}\{\hat{G}(e^{j\frac{2\pi p}{N}})\}$ es un estimador no consistente.

7.7. ETFE Pasivo

El propósito de esta sección es estimar

$$\hat{\mathbf{G}} = \text{Re}\{\hat{\mathbf{G}}\} + j\text{Im}\{\hat{\mathbf{G}}\} \triangleq \begin{bmatrix} \text{Re}\{\hat{G}(e^0)\} \\ \vdots \\ \text{Re}\{\hat{G}(e^{j\frac{2\pi\rho}{N}})\} \\ \vdots \\ \text{Re}\{\hat{G}(e^{j\pi})\} \end{bmatrix} + j \begin{bmatrix} \text{Im}\{\hat{G}(e^0)\} \\ \vdots \\ \text{Im}\{\hat{G}(e^{j\frac{2\pi\rho}{N}})\} \\ \vdots \\ \text{Im}\{\hat{G}(e^{j\pi})\} \end{bmatrix}, \quad (7.7.1)$$

sabiendo que la respuesta en frecuencia discreta $G_0(e^{j\omega})$ proviene de un sistema discreto pasivo. Dado que la pasividad únicamente depende de la parte real de la respuesta en frecuencia, se debe forzar condiciones sobre $\text{Re}\{\hat{\mathbf{G}}\}$.

Se recuerda que, de acuerdo con lo discutido en la Sección 7.4, sólo tiene sentido plantearse este problema si el sistema continuo pasivo discretizado por retenedor de orden cero es un sistema bipropio con ganancia de paso directo lo suficientemente grande, o si se está imponiendo una frecuencia de muestreo lo suficientemente alta, o si el sistema de tiempo continuo pasivo se discretiza por Tustin.

7.7.1. Pasividad por truncamiento y blanqueo

Naturalmente, la primera opción para estimar $\hat{\mathbf{G}}$ pasivo consiste en simplemente hacer cero aquellos valores de $\text{Re}\{\hat{\mathbf{G}}\}$, obtenidos con ETFE, que son menores que cero:

$$\tilde{\mathbf{G}} = \text{Re}\{\tilde{\mathbf{G}}\} + j\text{Im}\{\tilde{\mathbf{G}}\} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\rho \times \rho} & \mathbf{0}_{\rho \times (\frac{N}{2} + 1 - \rho)} \\ \mathbf{0}_{(\frac{N}{2} + 1 - \rho) \times \rho} & \mathbf{I}_{\frac{N}{2} + 1 - \rho} \end{bmatrix} \mathbf{J} \text{Re}\{\hat{\mathbf{G}}\} + j\text{Im}\{\hat{\mathbf{G}}\}, \quad (7.7.2)$$

donde ρ es la cantidad de valores de la estimación de $\text{Re}\{\hat{\mathbf{G}}\}$ que son menores que cero, y \mathbf{J} es una matriz de permutación tal que los primeros ρ elementos del vector $\mathbf{J}\text{Re}\{\hat{\mathbf{G}}\}$ sean negativos. Lo anterior también se puede expresar como

$$\tilde{\mathbf{G}} = \text{máx}(\mathbf{0}, \text{Re}\{\hat{\mathbf{G}}\}) + j\text{Im}\{\hat{\mathbf{G}}\}, \quad (7.7.3)$$

donde el máximo se aplica elemento a elemento.

De por sí este método debiera entregar mejores resultados para los casos considerados. Se sabe que el diagrama de Nyquist de un sistema discreto pasivo debe estar en el semiplano derecho. Por ende, cualquier valor negativo en la parte real de un punto estimado de la respuesta en frecuencia naturalmente se puede aproximar de mejor forma a su valor real con el valor cero.

Note que, como sucede con todas las funciones de probabilidad construidas con el operador máx, forzar a cero los datos negativos trunca la función de densidad de probabilidad asociada con cada elemento, haciendo que la media de cada término de este nuevo estimador aumente. Es decir, el estimador (7.7.2) es sesgado.

A continuación se estudia un ejemplo básico de este método. Considérese la estructura output error descrita en (3.2.1), con varianza de ruido blanco $\sigma^2 = 0.05$. Sea la función de transferencia en

tiempo discreto

$$G_0(q) = \frac{q(q - 0.7)}{(q - 0.95)(q - 0.8)}.$$

Con $N = 500$, se aplica ETFE para obtener la respuesta en frecuencia estimada. Con ésta, se obtiene el estimador dado por (7.7.2), y se grafican los resultados en los dominios de tiempo y frecuencia en la Figura 7.7.

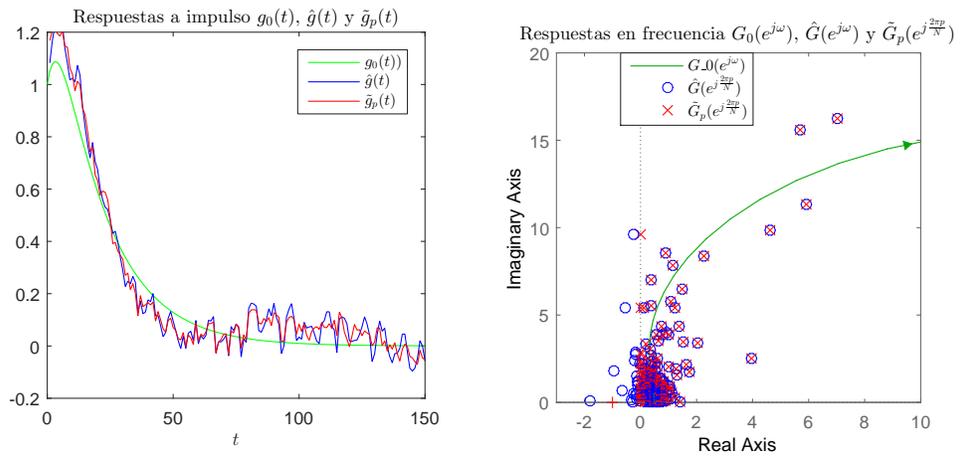


Figura 7.7: Izquierda: respuesta a impulso verdadera (verde), estimada por ETFE tradicional (azul), y estimada por ETFE pasivo (rojo). Derecha: respuesta en frecuencia verdadera (verde), estimada por ETFE tradicional (azul), y estimada por ETFE pasivo (rojo).

En esta realización, la imposición de pasividad acerca más de 30 puntos de la respuesta en frecuencia estimada a cero, logrando ligeras mejoras en tiempo y por supuesto en frecuencia.

Además de notarse en forma empírica que el estimador pasivo se acerca más a los valores esperados por la respuesta en frecuencia, es posible mostrar a través de un análisis de Monte Carlo que la estimación por ETFE pasivo tiende a correr los datos hacia la derecha. A modo de ejemplo, se consideran 1000 simulaciones de Monte Carlo con $N = 2000$ para reducir el efecto de $M_N(e^{j\omega})$, término que también provoca sesgo pero que tiende a cero a medida que $N \rightarrow \infty$. En la Figura 7.8 se grafican las respuestas en frecuencia promediadas en 1000 experimentos, en conjunto con la respuesta en frecuencia verdadera. Como se aprecia en la Figura 7.8, la respuesta en frecuencia sin imposición de pasividad es en promedio no pasiva. Como se ha discutido anteriormente, esto es producto del efecto de $M(e^{j\omega})$, el cual puede provocar que el estimador ETFE en media sea no pasivo.

El efecto del sesgo producto del operador máx se observa más claramente en la Figura 7.9.

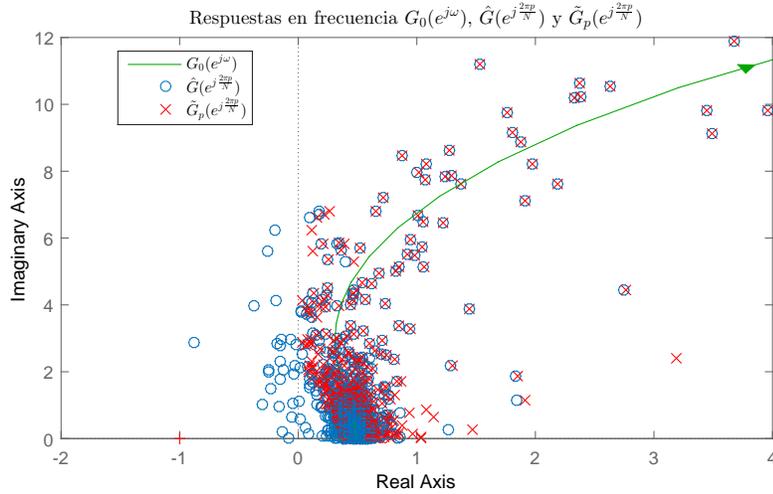


Figura 7.8: Respuestas en frecuencia verdadera (verde), promedio de las estimaciones por ETFE tradicional (azul), y promedio por ETFE pasivo (rojo).

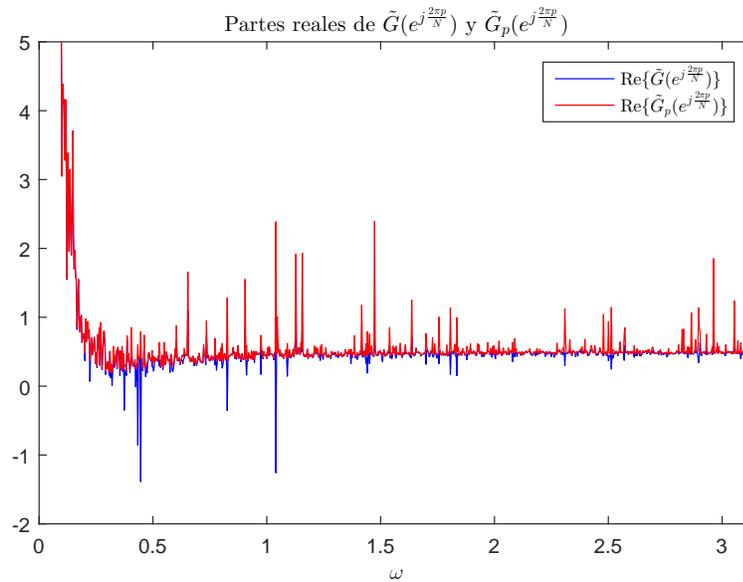


Figura 7.9: Promedio de las estimaciones de la parte real de la respuesta en frecuencia por ETFE tradicional (azul), y por ETFE pasivo (rojo).

Los errores cuadráticos medios para este caso, son los siguientes:

$$\text{MSE}_{\text{Re}\{\hat{G}\}} = 4.05 \times 10^4, \quad \text{MSE}_{\text{Re}\{\tilde{G}_p\}} = 2.00 \times 10^4,$$

lo que equivale a una reducción de aproximadamente 51 % del error cuadrático medio asociado a la

parte real del estimador ETFE en el dominio de la frecuencia.

La pregunta que nace a partir de los análisis anteriores es, al igual que el problema de causalidad, si existe un mejor método para forzar pasividad. Una idea es considerar el proceso de blanqueo hecho en causalidad, y aplicando de esta misma forma a este problema. Es decir, se puede considerar el siguiente estimador

$$\tilde{G}_p = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{C} \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0}_{\rho \times \rho} & \mathbf{0}_{\rho \times (\frac{N}{2} + 1 - \rho)} \\ \hline \mathbf{0}_{(\frac{N}{2} + 1 - \rho) \times \rho} & \mathbf{I}_{\frac{N}{2} + 1 - \rho} \end{array} \right] \mathbf{C}^{-1} \mathbf{J} \text{Re}\{\hat{G}\} + j \text{Im}\{\hat{G}\}, \quad (7.7.4)$$

donde \mathbf{C} es la matriz de factorización de Cholesky de la matriz de covarianza, determinada en la Sección 7.6. Por desgracia, a diferencia del problema de causalidad, se ha mostrado en la Sección 7.6 que los puntos de la parte real de la respuesta en frecuencia estimada son asintóticamente no correlacionados con una realización de ruido blanco en la entrada. Dado que éste es el escenario común en identificación, se puede afirmar que el estimador (7.7.4) no entrega mejoras con respecto al estimador presentado en (7.7.2). Esto tiene sentido, porque la restricción de pasividad de un punto no entrega mayor información sobre los valores estimados en los restantes, dado que no hay una relación estadística entre ellos.

En resumen, dado que los elementos de la respuesta en frecuencia no están correlacionados entre sí, las técnicas anteriores dan lugar a prácticamente el mismo estimador \tilde{G}_p .

7.7.2. Tratamiento con teoría de outliers

Aparte del estimador (7.7.2), es posible mejorar heurísticamente el estimador forzando pasividad a través del tratamiento de los valores negativos como *outliers*. Se sabe que por argumentos de continuidad, frecuencias cercanas deberían tener estimaciones cercanas entre sí. Libros enteros se han dedicado a revisar esta materia relacionada con pérdida de datos en experimentos estadísticos y cómo solucionar los problemas asociados [89, 90]. Existen diversas opciones dadas en la literatura para en este caso reemplazar los valores negativos de la parte real de la respuesta en frecuencia. Sin ánimos de explorar todas las opciones debido a la vasta cantidad de métodos posibles, a continuación se mencionan algunos métodos comunes que fuerzan pasividad en una estimación:

- Reemplazo por media: La técnica más simple en este caso, es reemplazar el valor negativo por la media de los valores en frecuencias contiguas que sean positivos. Tal como varias de las estrategias planteadas en esta sección, incluso puede empeorar la estimación inicial si existen muchos valores negativos estimados de forma consecutiva.
- Reemplazo con mediana: Siguiendo una idea similar a la del filtro de Hampel [91, 92], por cada outlier se considera una ventana de largo m , y se reemplaza el valor negativo por la mediana de los m datos no negativos en las frecuencias vecinas.
- Interpolación: Dada una cantidad de datos cercanos al (los) outlier(s), se forma un polinomio interpolador con los datos positivos, y se reemplaza en el polinomio interpolador la frecuencia donde se tiene(n) el (los) outlier(s) para encontrar una aproximación razonable. El mecanismo planteado no asegura a priori un reemplazo no negativo, por ende, debe forzarse a posteriori o bien adecuar el orden del polinomio interpolador.

Como es sabido, este método es una extensión al tratamiento con la media. Su uso puede tener más sentido si hay una cantidad no menor de valores negativos de forma consecutiva, y formando un polinomio de orden considerable para aproximarse al diagrama de Nyquist real, continuo en el dominio de la frecuencia.

- Métodos de regresión: Dados los datos cercanos a cada outlier, o en un cierto intervalo donde éstos se encuentren, se puede aplicar cuadrados mínimos con los datos positivos para obtener una predicción de los datos no considerados a través de un polinomio predictor. Esto tampoco asegura a priori un reemplazo no negativo, pero se puede manipular de la misma forma que la proposición anterior.

La ventaja de este método en conjunto con el de interpolación, es que se aprovecha de mejor forma la relación gráfica que tiene cada punto de la respuesta en frecuencia. Por supuesto, esto se logra con mayor trabajo computacional, lo que es poco razonable para los propósitos últimos de la estimación no paramétrica estudiada.

- Eliminación: La forma menos recomendada consiste en simplemente eliminar los datos negativos, sin reemplazar por otros. Esto puede tener un efecto visual en frecuencia, pero los efectos de eliminar al momento de estimar la respuesta a impulso son negativos, pues la única forma razonable de trabajar este caso, es haciendo el reemplazo formal del dato errado con un valor cero. Esto ciertamente no refleja de forma cercana el valor verdadero de la respuesta en frecuencia y por ende, la estimación en el tiempo es imprecisa.

7.8. Conclusiones

En este capítulo se ha discutido en detalle el concepto de pasividad aplicado a sistemas lineales continuos y discretos, con el objetivo de imponer las propiedades de los sistemas pasivos a la estimación obtenida por ETFE. Además de caracterizar la propiedad de pasividad para sistemas lineales estables invariantes en el tiempo, se ha determinado que los sistemas en tiempo discreto que son pasivos deben provenir de sistemas pasivos bipropios en tiempo continuo con suficiente ganancia de paso directo, o con un tiempo de muestreo suficientemente pequeño, o por la discretización de Tustin de un sistema pasivo en tiempo continuo. Sin duda esto limita el alcance de la teoría presentada, pues a diferencia de la imposición de causalidad, pasividad es un concepto aplicable en casos muy particulares de sistemas reales, y su preservación a través de discretización es una muestra clara de las dificultades que este concepto conlleva.

En cuanto a la imposición de pasividad, se ha notado que la técnica a través de blanqueamiento entrega prácticamente los mismos resultados que el estimador que trunca los valores negativos de $\text{Re}\{\hat{G}\}$, pues bajo suposiciones razonables los elementos de la respuesta en frecuencia estimada por ETFE son no correlacionados entre sí. La técnica desarrollada con el reemplazo a valores cero permite obtener un estimador que impone pasividad, a cambio de perder en sesgo. Finalmente, se han revisado otras técnicas para imponer pasividad bajo la teoría de outliers. Si bien no se consideran estos tratamientos como una solución definitiva al problema, se establece un marco de trabajo alternativo para abordar la restricción de pasividad en la teoría de estimación no paramétrica con ETFE.

CONCLUSIONES

Este capítulo presenta un resumen de los resultados más importantes de esta tesis. En cada capítulo se consideraron conclusiones particulares, razón por la cual en este capítulo se resaltarán aspectos generales en relación al trabajo realizado, más que detalles encontrados a finales de cada capítulo anterior. Se entrega, además de una discusión general del trabajo, un resumen de las contribuciones principales por cada capítulo y algunas ideas para trabajo futuro.

8.1. Discusión general de los resultados

Pese a que existe mucha investigación actual sobre métodos paramétricos de identificación de sistemas, el campo de métodos no paramétricos sigue en progreso debido a que para obtener un modelo paramétrico se necesita tener ideas sobre el orden del sistema, sus posibles retardos, y dinámicas. El trabajo de tesis se ha planteado bajo el contexto de mejoras sobre el método no paramétrico denominado análisis espectral, enfocándose particularmente en el estimador ETFE.

Los resultados obtenidos muestran que es posible imponer causalidad y pasividad sobre el estimador ETFE. En cuanto a la imposición de causalidad, se ha concluido que el trabajo con DTFT muestra las no causalidades producidas por la secuencia de entrada, y que es posible remediarlas con la construcción de un estimador lineal que no sólo fuerza causalidad, sino que además minimiza la matriz de covarianza del estimador dentro de una amplia clase de estimadores lineales. El cálculo de la matriz de covarianza de la estimación de la respuesta a impulso por ETFE resulta esencial para la obtención de este estimador.

Diversos casos han sido planteados y abordados con éxito en esta materia. Se ha incluido el efecto de las condiciones iniciales, propuesto un estimador causal para estructuras generales, y se ha obtenido un estimador causal con ETFE suavizado, es decir, con la inclusión de ventanas no rectangulares para estimar las densidades espectrales de potencia. Para todos estos casos se ha demostrado la existencia del estimador lineal óptimo dentro de una clase amplia de estimadores lineales en cuanto minimiza la matriz de covarianza de la estimación causal, y se han probado los resultados a través de simulación con diversos sistemas. Las ganancias en varianza son considerables para todas las configuraciones presentadas y estudiadas. Por supuesto, en la inclusión de ventanas se observa menor ganancia que en los casos restantes, producto que las estimaciones ya encuentran reducidas sus varianzas por el enventanado.

Por otra parte, la imposición de pasividad en el estimador es conceptualmente un tema más difícil de abordar, en cuanto a que si bien se conoce cuál es la restricción que debe cumplir la respuesta

en frecuencia estimada, no se sabe a priori cuales son los valores de la respuesta en frecuencia que deben llevarse a cero. Además, el conjunto de sistemas pasivos en tiempo continuo que tienen discretización pasiva por retenedor de orden cero es bastante reducido. Las aplicaciones por ende, no son tan directas como lo es el problema de causalidad. Para estos casos se han determinado varias opciones que fuerzan pasividad en la estimación y por ende, empíricamente son más cercanas a los valores reales estimados.

El trabajo hecho contribuye al estado del arte de análisis espectral en estimación no paramétrica. Sus aplicaciones, tal como son los métodos no paramétricos en identificación, son variados y dependen de cada sistema en cuestión. En resumen, si se satisfacen las condiciones de causalidad o pasividad, gracias a este trabajo se pueden estimar más fielmente la respuesta a impulso y respuesta en frecuencia del sistema causal o pasivo respectivamente, lo cual es el fin último de la tesis presentada.

8.2. Contribuciones principales por capítulo

Las principales contribuciones de este trabajo se condensan a continuación:

- **Capítulo 1:** Se introduce brevemente el problema a tratar, se revisa el estado del arte, y se mencionan los principales problemas y contribuciones del trabajo.
- **Capítulo 2:** Se entregan las herramientas básicas para comprender en perspectiva los resultados obtenidos en los capítulos siguientes, en cuanto a que da un marco teórico para el desarrollo de éstos.
- **Capítulo 3:** Se obtiene la expresión exacta del estimador de la respuesta a impulso por ETFE suponiendo una estructura de modelo tipo output error. Además de determinar la media y matriz de covarianza del estimador, obteniéndose que es asintóticamente no sesgado e inconsistente, se muestra que éste no es causal. Se afirma que la causalidad depende de la señal de entrada, y que una entrada arbitraria muy probablemente introduce no causalidad en el estimador.
- **Capítulo 4:** Se implementa el estimador ETFE como cociente entre la DTFT de la señal de salida y la DTFT de la señal de entrada, contrario al cociente entre DFT, que es lo normalmente utilizado en la práctica. Se estudian aquellas señales que producen estimaciones causales, y se determinan propiedades esenciales de éstas a través de simulaciones y resultados teóricos mostrados en la práctica.
- **Capítulo 5:** Se describe la técnica ocupada para forzar causalidad en el estimador ETFE en el dominio del tiempo. Se demuestra que el estimador causal por ETFE es el estimador lineal de matriz de covarianza mínima dentro de una amplia clase de estimadores lineales asintóticamente insesgados, y que a medida que se fuerzan más valores no causales a cero, la estimación causal disminuye aún más su matriz de covarianza y por ende, las varianzas coeficiente por coeficiente. Se muestra en simulación con sistemas de diversa complejidad los resultados teóricos obtenidos.

- **Capítulo 6:** Se entrega, a juicio del autor, las contribuciones más relevantes del trabajo. En primer lugar se extienden los resultados obtenidos en el Capítulo 5 al incorporar el efecto de las condiciones iniciales del sistema, concluyendo que es posible formar exactamente el mismo estimador para el caso con condiciones iniciales cero, pudiéndose aplicar los mismos teoremas del capítulo anterior. Se formula el estimador ETFE causal para estructuras generales, en donde se forma un método ETFE a dos pasos para en primer lugar estimar la respuesta a impulso del filtro del ruido, y luego construir la matriz de covarianza estimada y a partir de ésta, el estimador causal. Junto con lo anterior, se desarrollan las mismas ideas anteriores aplicadas a ETFE suavizado, es decir, con inclusión de ventanas no rectangulares para estimar las densidades espectrales de potencia. Los resultados obtenidos se aplican a ejemplos simulados, consiguiendo mostrar empíricamente las mejoras en varianza coeficiente por coeficiente en diversos sistemas.
- **Capítulo 7:** En este capítulo se discute la idea de imponer pasividad en la estimación por ETFE. Se muestran las principales propiedades y caracterización de los sistemas pasivos en tiempo continuo y discreto, con el fin de orientar los alcances de la imposición de pasividad. Se demuestra para qué tipos de sistemas continuos y con qué discretización se consiguen sistemas discretos pasivos, y dado un sistema pasivo en tiempo discreto, se construye un estimador que impone pasividad en el dominio de la frecuencia. Además, se describen alternativas para abordar este problema bajo la teoría de outliers.

8.3. Trabajo futuro

Durante el transcurso de este trabajo se han distinguido algunas extensiones que posiblemente puedan dar lugar a resultados de relevancia. Éstas son:

- La caracterización de señales de entrada que provocan estimaciones causales puede profundizarse para formular secuencias que sean estacionarias y acotadas, aptas para identificación.
- Si bien se ha abarcado en detalle la imposición de causalidad, es posible explorar más técnicas de estimación de respuesta a impulso del filtro del ruido, con el fin de mejorar las estimaciones obtenidas del modelo del ruido y con esto, conseguir mejoras en varianza de la respuesta a impulso del estimador ETFE.
- Este trabajo no contempla el uso de ventanas de ponderación en estructuras generales. El desarrollo de la forma explícita de la respuesta a impulso debiese ser similar al del Capítulo 6, pero con mayores complicaciones por razones obvias. Este caso es de interés, pues representa el caso más general que se puede considerar en este marco de trabajo. Además, se puede profundizar sobre los efectos de la elección del tamaño de ventana en la singularidad de la matriz de covarianza, analizando con detalle cuáles son las características que hacen que la matriz de factorización de Cholesky no tenga inversa para valores pequeños de ancho de ventana. También es interesante estudiar el efecto del parámetro M en el sesgo y varianza del estimador, con el fin de obtener criterios heurísticos para la elección de éste.
- En cuanto al tema de pasividad, es claro que el próximo paso para trabajo futuro es extender lo ya obtenido para modelos output error, para estructuras generales. Además, es relevante el

caso de ETFE suavizado, pues es claramente el que más se ocupa en la práctica, por razones mencionadas en el capítulo 6.

- Finalmente, sería interesante analizar condiciones necesarias y suficientes del concepto de pasividad para sistemas lineales y estables en el dominio del tiempo, para posiblemente implementar pasividad en este dominio. La ventaja en este caso, sería la correlación entre los coeficientes estimados en el tiempo, con lo cual se podría adoptar una técnica de mejora de estimación tipo blanqueo de Cholesky, tal como se ha hecho para el problema de imposición de causalidad.

NOTACIÓN Y CONCEPTOS MATEMÁTICOS DE UTILIDAD

El presente apéndice define la notación empleada en esta tesis. Ésta es ocupada como guía, ya que la notación formal de cada elemento particular puede encontrarse explicada en breve en la sección respectiva. Adicionalmente, se introducen definiciones útiles para la mejor comprensión de los resultados que se presentan.

A.1. Notación y elementos básicos

Se denota por \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{R} y \mathbb{C} al conjunto de los números naturales, enteros, reales y complejos respectivamente. Para referirse a conjuntos numéricos de dimensión superior, específicamente en la definición de vectores y matrices, se denota con superíndices cuando sea necesario. Para distinguir matrices y elementos escalares, se denota con letras negritas a los términos matriciales. Se define $j = \sqrt{-1}$. Dado un número complejo $x \in \mathbb{C}$, se denota su módulo como $|x|$, su conjugado como \bar{x} y su parte real e imaginaria como $\text{Re}\{z\}$ e $\text{Im}\{z\}$ respectivamente. Para una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times m}$, con $n, m \in \mathbb{N}$, se define \mathbf{A}^T , \mathbf{A}^* , \mathbf{A}^\dagger y $\text{rank}\{\mathbf{A}\}$ como su traspuesta, su hermitiana, su pseudo-inversa y su rango, respectivamente. Si $m = n$, se define \mathbf{A}^{-1} y $\text{tr}\{\mathbf{A}\}$ como su inversa y traza respectivamente. Definiendo $i, j, n, m \in \mathbb{N}$, con $i \leq n$ y $j \leq m$, se denota como $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ el término perteneciente a la i -ésima fila y a la j -ésima columna de una matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times m}$. Para el vector $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$, se define $\text{diag}\{\mathbf{v}\}$ como la matriz en $\mathbb{C}^{n \times n}$ tal que $a_{i,i} = v_i$ y $a_{i,j} = 0$ si $i \neq j$. Se define como \mathbf{I}_n la matriz identidad de orden n , y el vector o matriz nulo como $\mathbf{0}$, con un subíndice que indica su dimensión cuando es necesario explicitarla.

En otras materias de interés de esta tesis, se denota el hermitiano de una función de transferencia de tiempo discreto $H(z)$ como $H(z)^*$. Finalmente, si \mathbf{y} es una variable aleatoria, se representa $E\{\mathbf{y}\}$ como su valor esperado, y $\text{cov}(\mathbf{y})$ como su matriz de covarianza.

A.2. Transformada de Fourier en tiempo discreto y transformada de Fourier discreta

Las técnicas del análisis de Fourier de tiempo discreto son en extremo útiles en el estudio de señales y sistemas de tiempo discreto. En esta tesis, las técnicas de Fourier constituyen herramientas esenciales para la obtención de los estimadores no paramétricos. A continuación se presentan las definiciones y principales propiedades de la transformada de Fourier en tiempo discreto y la transformada de Fourier discreta.

A.2.1. Transformada de Fourier en tiempo discreto (DTFT)

Considérese una secuencia general¹ $\{x_t\}_{t \in \mathbb{Z}}$. La transformada de Fourier de tiempo discreto (*Discrete-time Fourier transform*, DTFT) [37] de la señal discreta x_t se define como

$$\mathcal{F}\{x_t\} = X(e^{j\omega}) = \sum_{t=-\infty}^{\infty} x_t e^{-j\omega t}. \quad (\text{A.2.1})$$

Durante el desarrollo de esta tesis, es común estudiar la DTFT de señales causales, las cuales satisfacen $x_t = 0$ para $t < 0$. Por esto, se adecuan los límites de la sumatoria cuando sea apropiado. La transformada inversa de Fourier en tiempo discreto de $X(e^{j\omega})$ es

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\omega})\} = x_t = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\{z \in \mathbb{C}; |z|=1\}} X(z) z^{t-1} dz \quad (\text{A.2.2})$$

Se denota el par señal-transformada como $x_t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$. Esta transformada satisface las propiedades detalladas a continuación, que son utilizadas en esta tesis:

1. **Linealidad:** Si $x_t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$ e $y_t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(e^{j\omega})$, entonces para cualquier valores α y β ,

$$\alpha x_t + \beta y_t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \alpha X(e^{j\omega}) + \beta Y(e^{j\omega}). \quad (\text{A.2.3})$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\alpha x_t + \beta y_t\} &= \sum_{t=-\infty}^{\infty} (\alpha x_t + \beta y_t) e^{-j\omega t} \\ &= \alpha \sum_{t=-\infty}^{\infty} x_t e^{-j\omega t} + \beta \sum_{t=-\infty}^{\infty} y_t e^{-j\omega t} \\ &= \alpha X(e^{j\omega}) + \beta Y(e^{j\omega}). \end{aligned}$$

□

¹Durante esta tesis se denotan las señales discretas con variable independiente como subíndice. Sin embargo, en algunos desarrollos se preferirá la notación $x(t)$ para ser precisos en la definición de la secuencia en cuestión, al poder de esta forma caracterizar más precisamente la señal ocupando sub y superíndices.

2. **Retardo temporal:** Si $x_t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$, entonces para todo $t_0 \in \mathbb{Z}$,

$$x_{t-t_0} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{-j\omega t_0} X(e^{j\omega}). \quad (\text{A.2.4})$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x_{t-t_0}\} &= \sum_{t=-\infty}^{\infty} x_{t-t_0} e^{-j\omega t} \\ &= e^{-j\omega t_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-j\omega k} \\ &= e^{-j\omega t_0} X(e^{j\omega}), \end{aligned}$$

en el cual se ha hecho el cambio de variable $t - t_0 = k$. □

3. **Inversión temporal:** Si $x_t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$, entonces

$$x_{-t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{-j\omega}). \quad (\text{A.2.5})$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{x_{-t}\} &= \sum_{t=-\infty}^{\infty} x_{-t} e^{-j\omega t} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k (e^{-j\omega})^{-k} \\ &= X(e^{-j\omega}), \end{aligned}$$

donde se ha hecho el cambio de variable $-t = k$. □

Observación A.2.1. Si $x_t \in \mathbb{R}$ para todo $t \in \mathbb{Z}$, entonces $X(e^{-j\omega}) = \overline{X(e^{j\omega})}$.

4. **Convolución:** $x_t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega})$ e $y_t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(e^{j\omega})$, entonces

$$x_t * y_t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\omega}) Y(e^{j\omega}), \quad (\text{A.2.6})$$

donde $x_t * y_t$ denota la convolución entre las señales x_t e y_t , definida como

$$x_t * y_t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k y_{t-k}. \quad (\text{A.2.7})$$

Demostración.

$$\mathcal{F}\{x_t * y_t\} = \sum_{t=-\infty}^{\infty} (x_t * y_t) e^{-j\omega t}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{t=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k y_{t-k} e^{-j\omega t} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \sum_{t=-\infty}^{\infty} y_{t-k} e^{-j\omega t} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k \left(e^{-j\omega k} Y(e^{j\omega}) \right) \\
&= \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k e^{-j\omega k} \right) Y(e^{j\omega}) \\
&= X(e^{j\omega}) Y(e^{j\omega}).
\end{aligned}$$

□

Más propiedades como las anteriores pueden encontrarse en [39].

A.2.2. Transformada de Fourier discreta (DFT)

La transformada definida en la subsección anterior ha sido ampliamente analizada y utilizada en muchas aplicaciones en ingeniería, física y matemática. Otra herramienta de gran uso en el cálculo computacional de la transformada de Fourier de señales de duración finita, es la transformada discreta de Fourier (DFT, [93]). Ésta tiene su origen en la serie de Fourier discreta de una señal periódica de período finito N . Su ventaja principal es la facilidad de cómputo a partir de algoritmos altamente optimizados usando la transformada rápida de Fourier (*Fast Fourier transform*, FFT) [72].

Para una señal finita $\{x_t\}_{t=0}^{N-1}$, se define la DFT de x_t como

$$X(e^{j\frac{2\pi k}{N}}) = \sum_{t=0}^{N-1} x_t e^{-j\frac{2\pi kt}{N}}. \quad (\text{A.2.8})$$

Para facilitar la notación, en esta tesis se adopta la convención de que las señales están definidas desde $t = 1$ hasta $t = N$, y por ende se adecuan los límites de la sumatoria de forma apropiada cuando sea necesario.

De forma similar, la inversa de esta transformada es

$$x_t = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(e^{j\frac{2\pi k}{N}}) e^{j\frac{2\pi kt}{N}}. \quad (\text{A.2.9})$$

Al igual que para la DTFT, la notación par señal-transformada es $x_t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\frac{2\pi k}{N}})$. Este abuso de notación se hará sin mayores complicaciones, pues se menciona explícitamente qué transformada se utiliza en cada análisis y resultado. De la misma forma que para la transformada anterior, se establecen a continuación algunas propiedades de interés con sus respectivas demostraciones:

1. **Linealidad:** Si $x_t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\frac{2\pi k}{N}})$ e $y_t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(e^{j\frac{2\pi k}{N}})$, entonces para cualquier valores α y β ,

$$\alpha x_t + \beta y_t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \alpha X(e^{j\frac{2\pi k}{N}}) + \beta Y(e^{j\frac{2\pi k}{N}}). \quad (\text{A.2.10})$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\alpha x_t + \beta y_t\} &= \sum_{t=0}^{N-1} (\alpha x_t + \beta y_t) e^{-j\frac{2\pi kt}{N}} \\ &= \alpha \sum_{t=0}^{N-1} x_t e^{-j\frac{2\pi kt}{N}} + \beta \sum_{t=0}^{N-1} y_t e^{-j\frac{2\pi kt}{N}} \\ &= \alpha X(e^{j\frac{2\pi k}{N}}) + \beta Y(e^{j\frac{2\pi k}{N}}).\end{aligned}$$

□

2. **Inversión en frecuencia:** Si $x_t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\frac{2\pi k}{N}})$, entonces

$$x_{N-1-t} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} e^{j\frac{2\pi k}{N}} X(e^{-j\frac{2\pi k}{N}}). \quad (\text{A.2.11})$$

Demostración.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{x_{N-1-t}\} &= \sum_{t=0}^{N-1} x_{N-1-t} e^{-j\frac{2\pi kt}{N}} \\ &= \sum_{p=0}^{N-1} x_p e^{-j\frac{2\pi k(N-1-p)}{N}} \\ &= \sum_{p=0}^{N-1} x_p e^{j\frac{2\pi kp}{N}} e^{-j\frac{2\pi kN}{N}} e^{j\frac{2\pi k}{N}} \\ &= e^{j\frac{2\pi k}{N}} \sum_{p=0}^{N-1} x_p e^{j\frac{2\pi kp}{N}} \\ &= e^{j\frac{2\pi k}{N}} X(e^{-j\frac{2\pi k}{N}}),\end{aligned}$$

donde se ha hecho el cambio de variable $p = N - 1 - t$. □

3. **Convolución periódica:** Si $x_t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\frac{2\pi k}{N}})$ e $y_t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} Y(e^{j\frac{2\pi k}{N}})$, entonces

$$x_t * y_t \xleftrightarrow{\mathcal{F}} X(e^{j\frac{2\pi k}{N}}) Y(e^{j\frac{2\pi k}{N}}), \quad (\text{A.2.12})$$

donde $x_t * y_t$ denota la convolución periódica entre las señales x_t e y_t , definida como

$$x_t * y_t = \sum_{m=0}^{N-1} x_m y_{t-m}, \quad (\text{A.2.13})$$

donde para el cálculo de (A.2.13) se considera y_t periódica de período N , es decir, $y_t = y_{pN+t}$ para p entero.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{x_t * y_t\} &= \sum_{t=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x_m y_{t-m} e^{-j\frac{2\pi kt}{N}} \\
&\stackrel{(a)}{=} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{t=0}^{N-1} x_m y_{t-m} e^{-j\frac{2\pi kt}{N}} \\
&= \sum_{m=0}^{N-1} x_m \sum_{t=0}^{N-1} y_{t-m} e^{-j\frac{2\pi kt}{N}} \\
&\stackrel{(b)}{=} \sum_{m=0}^{N-1} x_m \sum_{s=-m}^{N-m-1} y_s e^{-j\frac{2\pi k(s+m)}{N}} \\
&\stackrel{(c)}{=} \sum_{m=0}^{N-1} x_m e^{-j\frac{2\pi km}{N}} \sum_{s=0}^{N-1} y_s e^{-j\frac{2\pi ks}{N}} \\
&\stackrel{(d)}{=} X(e^{j\frac{2\pi k}{N}})Y(e^{j\frac{2\pi k}{N}}), \tag{A.2.14}
\end{aligned}$$

donde (a) es cambiando el orden de las sumatorias, (b) es haciendo el cambio de variable $s = t - m$, (c) es producto de la N -periodicidad de y_t y de la exponencial compleja con variable s , y (d) es por la definición de la DFT. \square

A.3. Serie de Laurent y DTFT

La transformada de Fourier de tiempo discreto tiene una relación directa con la transformada Zeta [33]. Es fácil observar que la DTFT de una secuencia $\{x_t\}$ es equivalente a la transformada Zeta bilateral de esta secuencia, evaluada en $z = e^{j\omega}$. El análisis es equivalente para señales causales y la transformada Zeta definida desde $k = 0$ hasta $k = \infty$. Esta relación también se aprecia en la transformada inversa de la DTFT, la cual se puede calcular resolviendo una integral en la circunferencia unitaria del plano complejo, tal como se mostró en (A.2.2).

De la misma forma, la DTFT de una secuencia $\{x_t\}$ puede analizarse como la serie de Laurent [94] de una función de variable compleja que es analítica en la circunferencia unitaria, haciendo el cambio de variable formal $z = e^{j\omega}$. Por completitud, se define la representación en serie de Laurent de una función de variable compleja $f(z)$ con región de convergencia $R_1 < |z| < R_2$ que contiene a la circunferencia unitaria $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ como

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k z^{-k}. \tag{A.3.1}$$

Los coeficientes de la serie de Laurent, denominados α_k , se calculan según

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\{z \in \mathbb{C} : |z|=1\}} f(z) z^{k-1} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(e^{j\omega}) e^{j\omega k} d\omega. \tag{A.3.2}$$

En esta tesis, un resultado de interés que relaciona ambos conceptos es el cálculo del inverso de la DTFT de una señal:

Lema A.3.1. Sea $X_N(e^{j\omega})$ la DTFT de la señal $\{x_t\}$. Haciendo el cambio de variable $e^{j\omega} = z$, se expresa $X_N(e^{j\omega})$ como

$$X_N(z) = \sum_{t=1}^N x_t z^{-t} = \frac{z^{N-1}x_1 + z^{N-2}x_2 + \cdots + x_N}{z^N} = \frac{N_X(z)}{z^N}. \quad (\text{A.3.3})$$

Si $N_X(z)$ no tiene ceros en la circunferencia unitaria, el inverso de $X(e^{j\omega})$ puede escribirse como

$$\frac{1}{X(e^{j\omega})} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k e^{-j\omega k}, \quad (\text{A.3.4})$$

donde α_k corresponde a los coeficientes de la serie de Laurent de $\frac{z^N}{N_X(z)}$ con región de convergencia que contiene la circunferencia unitaria.

Demostración. Note que

$$\frac{1}{X_N(z)} = \frac{z^N}{N_X(z)}. \quad (\text{A.3.5})$$

Dado que $N_X(z)$ no tiene ceros en la circunferencia unitaria, la función racional $z^N(N_X(z))^{-1}$ es analítica en $|z| = 1$ y por ende existen $R_1 < 1$ y $R_2 > 1$ que definen la región de convergencia $R_1 < |z| < R_2$ de su serie de Laurent:

$$\frac{z^N}{N_X(z)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k z^{-k}. \quad (\text{A.3.6})$$

Dado que esta representación es válida para $|z| = 1$, el cambio de variable $z = e^{j\omega}$ es factible, obteniéndose (A.3.4). □

A.4. Matrices definidas positivas y factorización de Cholesky

Conceptos de utilidad en esta tesis son elementos de análisis matricial tales como las matrices (semi)definidas positivas, y su forma particular de factorización, la factorización de Cholesky.

A.4.1. Matrices particionadas por bloques

Se determina la inversa de una matriz triangular inferior particionada en el siguiente lema.

Lema A.4.1. Sea la matriz triangular no singular particionada por bloques $\mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array} \right]$. Su inversa está dada por

$$\mathbf{A}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{A}_{22}^{-1} \end{array} \right] \quad (\text{A.4.1})$$

Demostración. Multiplicando \mathbf{A} por su inversa,

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{A}_{22}^{-1} \end{array} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} - \mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{22}^{-1}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{A}_{22}\mathbf{A}_{22}^{-1} \end{array} \right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{I} \end{array} \right] \\
&= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{array} \right]. \tag{A.4.2}
\end{aligned}$$

□

A.4.2. Matrices definidas positivas

La propiedad de positividad de matrices simétricas (o hermitianas en el caso complejo), aparece naturalmente en numerosas aplicaciones. Esta propiedad generaliza el concepto de positividad de números reales, y es necesaria para definir qué se entiende con desigualdades matriciales, concepto clave para la demostración de los resultados más importantes de esta tesis. Su principal aplicación en ésta radica en las matrices de covarianza, las cuales por definición son semidefinidas positivas. Se procede a definir formalmente esta propiedad.

Definición A.4.1. Sea la matriz simétrica $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. La matriz \mathbf{A} es definida positiva [51] si

$$\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} > 0, \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n. \tag{A.4.3}$$

Por otra parte, la matriz \mathbf{A} es semidefinida positiva si

$$\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0, \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{C}^n. \tag{A.4.4}$$

A continuación se nombran algunas propiedades de interés que son utilizadas a lo largo de esta tesis, con su respectiva demostración. Sea \mathbf{A} matriz simétrica (hermitiana en el caso complejo, se considerará naturalmente por extensión).

1. Si $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es definida positiva, entonces todas sus submatrices principales son definidas positivas. Si \mathbf{A} es semidefinida positiva, entonces todas sus submatrices principales son semidefinidas positivas.

Demostración. Expresando \mathbf{A} como matriz por bloques,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix}, \tag{A.4.5}$$

donde $\mathbf{A}_{11} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ y $\mathbf{A}_{22} \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$, con $m \in \{0, 1, \dots, n\}$. Dado que \mathbf{A} es definida positiva, para todo $\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T \quad \mathbf{x}_2^T]^T \neq \mathbf{0}$ de dimensiones adecuadas se tiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} > 0. \tag{A.4.6}$$

En particular, fijando \mathbf{x}_1 como el vector nulo, con \mathbf{x}_2 arbitrario no nulo, se obtiene

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}_m \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}^* \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_m \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{x}_2^* \mathbf{A}_{22} \mathbf{x}_2 > 0, \tag{A.4.7}$$

Por lo cual la submatriz principal \mathbf{A}_{22} es definida positiva. De la misma forma con \mathbf{x}_2 nulo y \mathbf{x}_1 arbitrario no nulo, se obtiene \mathbf{A}_{11} es definida positiva. Dado que m es arbitrario, lo anterior es válido para todo valor de $m \in \{0, 1, \dots, n\}$. La segunda afirmación por demostrar sigue de la misma manera. \square

2. Si \mathbf{A} es definida positiva, entonces todos los elementos de su diagonal son mayores que cero. Si \mathbf{A} es semidefinida positiva, entonces todos los elementos de su diagonal son mayores o iguales que cero.

Demostración. Sea $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definida positiva. Dado que se cumple (A.4.3), fijando $\mathbf{x} = \mathbf{e}_i$, donde \mathbf{e}_i es el i -ésimo elemento de la base canónica de \mathbb{R}^n , se tiene

$$\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{e}_i^* \mathbf{A} \mathbf{e}_i = a_{i,i} > 0. \quad (\text{A.4.8})$$

Como $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ es arbitrario, se demuestra lo pedido. La segunda afirmación por demostrar sigue de la misma manera. \square

3. Si \mathbf{A} es definida positiva, entonces todos los autovalores de \mathbf{A} son positivos. Si \mathbf{A} es semidefinida positiva, entonces todos los autovalores de \mathbf{A} son no negativos.

Demostración. Sea λ, \mathbf{x} un par valor propio-vector propio de una matriz \mathbf{A} (semi)definida positiva. Entonces $\mathbf{x}^* \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^* \lambda \mathbf{x} = \lambda |\mathbf{x}|^2$ y por ende, $\lambda = (\mathbf{x}^* \lambda \mathbf{x}) / |\mathbf{x}|^2 \geq 0$ si \mathbf{A} es semidefinida positiva, y $\lambda > 0$ si \mathbf{A} es definida positiva. \square

A.4.3. Factorización de Cholesky

Factorizaciones de matrices son aplicadas en muchas áreas de la ciencia e ingeniería. Éstas sirven para optimizar tiempo de cómputo en algoritmos, para la resolución de ecuaciones matriciales y problemas de optimización, y para el análisis y procesamiento de señales. Una factorización de interés para esta tesis es la factorización de Cholesky.

La factorización de Cholesky es un tipo de factorización matricial aplicada a matrices (semi)definidas positivas². Esta factorización descompone la matriz simétrica y (semi)definida positiva en el producto de una matriz triangular inferior con elementos (no negativos) positivos en la diagonal, con su traspuesta. Es decir,

$$\mathbf{A} = \mathbf{C} \mathbf{C}^T. \quad (\text{A.4.9})$$

Por comodidad, en algunos resultados de esta tesis se usa la notación $\text{Chol}(\mathbf{A})$ para referirse a la matriz de la factorización de Cholesky de \mathbf{A} .

Es de interés en este trabajo conocer esta factorización a partir de matrices de covarianza, las cuales son definidas positivas y simétricas. Éstas comúnmente son expresadas como $\mathbf{P} = \mathbf{T} \mathbf{T}^T$, con \mathbf{T} una matriz rectangular. Para obtener la factorización de Cholesky en este caso, se obtiene la factorización $\mathbf{Q} \mathbf{R}$ [51] de \mathbf{T}^T , tal que \mathbf{R}^T sea matriz triangular inferior con las dimensiones adecuadas. Así,

$$\mathbf{P} = \mathbf{T} \mathbf{T}^T = \mathbf{R}^T \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{R} = \mathbf{R}^T \mathbf{R} \quad (\text{A.4.10})$$

²Cabe destacar que la factorización de Cholesky de una matriz semidefinida positiva no es única. El tratamiento de este caso no está abarcado en este apéndice y puede ser analizado con mayor detalle en [62].

Entonces, dado que la factorización de Cholesky de una matriz definida positiva es única, la matriz de la factorización es $\mathbf{C} = \mathbf{R}^T$.

Finalmente, se demuestra un resultado sobre la factorización de Cholesky de una matriz particionada por bloques.

Lema A.4.2. *Sea \mathbf{A} matriz simétrica y definida positiva, particionada por bloques. Ésta tiene factorización de Cholesky dada por*

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{21}^T \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \text{Chol}(\mathbf{A}_{11}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{21}\text{Chol}(\mathbf{A}_{11})^{-T} & \text{Chol}(\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{21}^T) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Chol}(\mathbf{A}_{11})^T & \text{Chol}(\mathbf{A}_{11})^{-1}\mathbf{A}_{21}^T \\ \mathbf{0} & \text{Chol}(\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{21}^T)^T \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{A.4.11})$$

Demostración. Para reducir espacio, se define

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \text{Chol}(\mathbf{A}_{11}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{21}\text{Chol}(\mathbf{A}_{11})^{-T} & \text{Chol}(\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{21}^T) \end{bmatrix}$$

El término $\text{Chol}(\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{21}^T)$ tiene sentido, pues es sabido [59] que si \mathbf{A} es definida positiva, entonces el complemento de Schur de \mathbf{A}_{11} con respecto a \mathbf{A} , $\mathbf{A}_{11}|\mathbf{A} = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{21}^T$ es definido positivo.

Multiplicando las matrices del lado derecho de (A.4.11),

$$\begin{aligned} &\mathbf{C}\mathbf{C}^T \\ &= \begin{bmatrix} \text{Chol}(\mathbf{A}_{11})\text{Chol}(\mathbf{A}_{11})^T & \text{Chol}(\mathbf{A}_{11})\text{Chol}(\mathbf{A}_{11})^{-1}\mathbf{A}_{21}^T \\ \mathbf{A}_{21}\text{Chol}(\mathbf{A}_{11})^{-T}\text{Chol}(\mathbf{A}_{11})^T & \mathbf{A}_{21}\text{Chol}(\mathbf{A}_{11})^{-T}\text{Chol}(\mathbf{A}_{11})^{-1}\mathbf{A}_{21}^T + \text{Chol}(\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{21}^T)\text{Chol}(\mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{21}^T) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{I}\mathbf{A}_{21}^T \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{I} & \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{21}^T + \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{21}^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{21}^T \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Como la diagonal de \mathbf{C} está formada como la diagonal de dos matrices de factorización de Cholesky, tiene solamente elementos positivos. Dado que \mathbf{C} es triangular inferior y claramente $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{C}^T$, \mathbf{C} es la factorización de Cholesky de \mathbf{A} . \square

REFERENCIAS

- [1] T. Söderström and P. Stoica, *System identification*. Prentice-Hall, 1988.
- [2] L. Ljung, *System identification*. Prentice-Hall, 2nd edition, 1999.
- [3] P. Stoica and R. L. Moses, *Introduction to spectral analysis*. Prentice-Hall, 1997.
- [4] L. Ljung, “On the estimation of transfer functions,” *Automatica*, vol. 21, no. 6, pp. 677–696, 1985.
- [5] A. Kessy, A. Lewin, and K. Strimmer, “Optimal whitening and decorrelation,” *arXiv preprint arXiv:1512.00809*, 2015.
- [6] Y. C. Eldar and A. V. Oppenheim, “MMSE whitening and subspace whitening,” *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 49, no. 7, pp. 1846–1851, 2003.
- [7] R. Pintelon and J. Schoukens, “Nonparametric techniques in system identification,” *Encyclopedia of Systems and Control*, pp. 907–918, 2015.
- [8] P. Guillaume, R. Pintelon, and J. Schoukens, “Nonparametric frequency-response function estimators based on nonlinear averaging techniques,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 41, no. 6, pp. 739–746, 1992.
- [9] M. Gevers, P. Hägg, H. Hjalmarsson, R. Pintelon, and J. Schoukens, “The transient impulse response modeling method and the local polynomial method for nonparametric system identification,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 45, no. 16, pp. 55–60, 2012.
- [10] C. Warwick, “Understanding the Kramers-Kronig relation using a pictorial proof,” *Physical Review*, vol. 104, pp. 1760–1770, 1956.
- [11] H. K. Khalil, *Nonlinear systems*. Prentice-Hall, 1996.
- [12] F. Tjärnström and L. Ljung, “Minimizing the variance of transfer function estimates,” *6th Saint Petersburg Symposium on Adaptive Systems Theory*, vol. 1, pp. 194–200, 1999.
- [13] P. Broersen, “A comparison of transfer function estimators,” *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 44, no. 3, 1995.

- [14] P. E. Wellstead, "Non-parametric methods of system identification," *Automatica*, vol. 17, no. 1, pp. 55–69, 1981.
- [15] A. Stenman, F. Gustafsson, D. E. Rivera, L. Ljung, and T. McKelvey, "On adaptive smoothing of empirical transfer function estimates," *Control Engineering Practice*, vol. 8, no. 11, pp. 1309–1315, 2000.
- [16] A. Stenman and F. Gustafsson, "Adaptive smoothing methods for frequency-function estimation," *Automatica*, vol. 37, no. 5, pp. 675–685, 2001.
- [17] P. Hägg and H. Hjalmarsson, "Non-parametric frequency function estimation using transient impulse response modelling," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 45, no. 16, pp. 43–48, 2012.
- [18] J. Lataire and T. Chen, "Transfer function and transient estimation by gaussian process regression in the frequency domain," *Automatica*, vol. 72, pp. 217–229, 2016.
- [19] R. Pintelon and J. Schoukens, *System identification: A frequency domain approach*, 2nd ed. Wiley-IEEE Press, 2012.
- [20] J. S. Bendat and A. G. Piersol, *Random data: analysis and measurement procedures*. Wiley-Interscience, 1971.
- [21] J. S. Bendat and A. G. Piersol, *Engineering applications of correlation and spectral analysis*. New York, Wiley-Interscience, 1980.
- [22] P. Delachartre, D. Tray, Z. Sun, G. Gimenez, and A. Dziedzic, "Estimation of the causal impulse response of underwater target," in *1994 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, vol. 2. IEEE, 1994, pp. II–385.
- [23] J. Park, K. Jung, Y. H. Hong, H.-K. Kim, and H. S. Lee, "Exact enforcement of the causality condition on the aerodynamic impulse response function using a truncated Fourier series," *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 140, no. 5, 2013.
- [24] H. Aboutaleb, L. L. Baranny, A. Elshabini, and F. Barlow, "A new method for causality enforcement of DRAM package models using discrete Hilbert transforms," in *2013 IEEE Workshop on Microelectronics and Electron Devices (WMED)*. IEEE, 2013, pp. 21–24.
- [25] L. L. Barannyk, H. A. Aboutaleb, A. Elshabini, and F. D. Barlow, "Spectrally accurate causality enforcement using SVD-based Fourier continuations for high-speed digital interconnects," *Components, Packaging and Manufacturing Technology, IEEE Transactions on*, vol. 5, no. 7, pp. 991–1005, 2015.
- [26] M. S. Mahmoud and A. Ismail, "Passivity and passification of time-delay systems," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 292, no. 1, pp. 247–258, 2004.
- [27] A. Fradkov, "Passification of non-square linear systems and feedback Yakubovich-Kalman-Popov lemma," *European journal of control*, vol. 9, no. 6, pp. 577–586, 2003.
- [28] H. Gao, T. Chen, and T. Chai, "Passivity and passification for networked control systems," *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 46, no. 4, pp. 1299–1322, 2007.

- [29] E. D. Campbell, A. Morales, and S. Agili, "A simple method for restoring passivity in s-parameters using singular value decomposition," in *2010 Digest of Technical Papers International Conference on Consumer Electronics (ICCE)*. IEEE, 2010, pp. 219–220.
- [30] B. Gustavsen, "Fast passivity enforcement for s-parameter models by perturbation of residue matrix eigenvalues," *IEEE Transactions on Advanced Packaging*, vol. 33, pp. 257–265, 2010.
- [31] D. Saraswat, R. Achar, and M. Nakhla, "Restoration of passivity in S-parameter data of microwave measurements," in *2005 IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest*. IEEE, 2005, pp. 4–pp.
- [32] J. Baillieul and T. Samad, *Encyclopedia of Systems and Control*. Springer, 2015.
- [33] M. E. Salgado, J. I. Yuz, and R. A. Rojas, *Análisis de sistemas lineales*. Prentice-Hall, 2005.
- [34] J. R. Leigh, *Control theory*. The Institution of Engineering and Technology, 2004.
- [35] B. Sohlberg, "Grey box modelling," in *Supervision and Control for Industrial Processes*. Springer, 1998, pp. 7–43.
- [36] H. Rake, "Step response and frequency response methods," *Automatica*, vol. 514, pp. 519–526, 2014.
- [37] A. V. Oppenheim, A. S. Willsky, and S. H. Nawab, *Signals and systems*. Prentice-Hall, 1983.
- [38] B. Y.-K. Hu, "Kramers-Kronig in two lines," *American Journal of Physics*, vol. 57, no. 9, pp. 821–821, 1989.
- [39] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, *Discrete-time signal processing*. Pearson Higher Education, 2010.
- [40] S. Stramigioli, C. Secchi, A. J. van der Schaft, and C. Fantuzzi, "Sampled data systems passivity and discrete port-Hamiltonian systems," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 21, no. 4, pp. 574–587, 2005.
- [41] J. Bao and P. L. Lee, *Process control: the passive systems approach*. Springer, 2007.
- [42] A. Van der Schaft, *L2-gain and passivity techniques in nonlinear control*. Springer, 2012.
- [43] B. Anderson and S. Vongpanitlerd, *Network analysis and synthesis*. Dover, 2006.
- [44] K. J. Åström and B. Wittenmark, *Computer-controlled systems: theory and design*. Prentice-Hall, 1997.
- [45] J. W. Brown, R. V. Churchill, and M. Lapidus, *Complex variables and applications*. McGraw-Hill, 1996.
- [46] M. J. Lighthill, *An introduction to Fourier analysis and generalised functions*. Cambridge University Press, 1958.
- [47] C. P. Hughes and A. Nikeghbali, "The zeros of random polynomials cluster uniformly near the unit circle," *Compositio Mathematica*, vol. 144, no. 03, pp. 734–746, 2008.

- [48] F. Vieta, "Opera mathematica, ed," *Schooten F v. Hildesheim: Olms (reproduction of the Leiden edition 1646)*, 1970.
- [49] E. I. Jury, "A simplified stability criterion for linear discrete systems," *Proceedings of the IRE*, vol. 50, no. 6, pp. 1493–1500, 1962.
- [50] E. I. Jury, *Theory and application of the z-Transform method*. Wiley, 1964.
- [51] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix analysis*. Cambridge university press, 2nd ed., 2012.
- [52] G. Strang, *Linear Algebra and Applications*. Academic Press, 1976.
- [53] C. R. Rojas, "Sobre la covarianza del error en ETFE," *Comunicación privada*, 2016.
- [54] C. Burrus and T. W. Parks, *DFT/FFT and convolution algorithms: theory and implementation*. John Wiley & Sons, 1991.
- [55] G. Eneström, "Remarque sur un théorème relatif aux racines de l'équation $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ où tous les coefficients a sont réels et positifs," *Tohoku Mathematical Journal, First Series*, vol. 18, pp. 34–36, 1920.
- [56] W. Chen, "On the polynomials with all their zeros on the unit circle," *Journal of mathematical analysis and applications*, vol. 190, no. 3, pp. 714–724, 1995.
- [57] M. Pukhta, "On location of zeros of polynomials," *American Journal of Mathematical Analysis*, vol. 2, no. 2, pp. 23–27, 2014.
- [58] C. A. Rohde, "Generalized inverses of partitioned matrices," *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 13, no. 4, pp. 1033–1035, 1965.
- [59] D. S. Bernstein, *Matrix mathematics: theory, facts, and formulas*. Princeton University Press, 2009.
- [60] J. Choi, J. J. Dongarra, L. S. Ostrouchov, A. P. Petitet, D. W. Walker, and R. C. Whaley, "Design and implementation of the ScaLAPACK LU, QR, and Cholesky factorization routines," *Scientific Programming*, vol. 5, no. 3, pp. 173–184, 1996.
- [61] Y. Zi-Zong, "Schur complements and determinant inequalities," *Journal of mathematical inequalities*, vol. 3, no. 2, pp. 161–167, 2009.
- [62] N. J. Higham, "Analysis of the Cholesky decomposition of a semi-definite matrix," *Reliable Numerical Computation*, pp. 161–185, 1990.
- [63] C. Robert and G. Casella, *Monte Carlo statistical methods*. Springer, 2013.
- [64] C. R. Rojas, R. A. Rojas, and D. A. Erraz, "On irreducible systems," *Comunicación privada*, 2004.
- [65] A. Papoulis, *Signal analysis*. McGraw-Hill, 1977.
- [66] D. R. Brillinger, *Time series: data analysis and theory*. SIAM, 2001.

- [67] A. Papoulis and S. U. Pillai, *Probability, random variables, and stochastic processes*. McGraw-Hill, 2002.
- [68] B. D. Tellegen, “The gyrator, a new electric network element,” *Philips Res. Rep.*, vol. 3, no. 2, pp. 81–101, 1948.
- [69] C. A. Desoer and M. Vidyasagar, *Feedback systems: input-output properties*. SIAM, 2009, vol. 55.
- [70] P. Moylan, *Dissipative Systems and Stability*, 2014. [Online]. Available: <http://www.pmoylan.org/pages/research/DissBook.html>
- [71] N. Kottenstette and P. J. Antsaklis, “Relationships between positive real, passive dissipative, & positive systems,” in *Proceedings of the 2010 American control conference*. IEEE, 2010, pp. 409–416.
- [72] C. Gasquet and P. Witomski, *Fourier analysis and applications: filtering, numerical computation, wavelets*. Springer, 2013.
- [73] B. Brogliato, R. Lozano, B. Maschke, and O. Egeland, *Dissipative systems analysis and control: Theory and applications*. Springer, 2006.
- [74] L. Hitz and B. Anderson, “Discrete positive-real functions and their application to system stability,” *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, vol. 116, no. 1, pp. 153–155, 1969.
- [75] G. C. Goodwin, S. F. Graebe, and M. E. Salgado, *Control system design*. Prentice-Hall, 2001.
- [76] W. J. Rugh, *Linear system theory*. Prentice-Hall, 1996.
- [77] A. Kelkar and S. Joshi, “Robust passification and control of non-passive systems,” in *Proceedings of the 1998 American Control Conference*, vol. 5. IEEE, 1998, pp. 3133–3137.
- [78] J. O. Smith, “Techniques for digital filter design and system identification with application to the violin,” Ph.D. dissertation, Stanford University, 1983.
- [79] J. Bak and D. J. Newman, *Complex analysis*. Springer, 2010.
- [80] P. Albertos, “Sampled data passive systems,” in *International Conference on Computer Aided Systems Theory*. Springer, 1993, pp. 118–130.
- [81] E. M. Navarro-López, “Several dissipativity and passivity implications in the linear discrete-time setting,” *Mathematical Problems in Engineering*, vol. 2005, no. 6, pp. 599–616, 2005.
- [82] E. M. Navarro-López, “Dissipativity and passivity-related properties in nonlinear discrete-time systems,” Ph.D. dissertation, Universitat Politècnica de Catalunya, 2003.
- [83] T. Hagiwara, “Nyquist stability criterion and positive-realness of sampled-data systems,” *Systems & control letters*, vol. 45, no. 4, pp. 283–291, 2002.
- [84] T. Hagiwara and T. Mugiuda, “Positive-realness analysis of sampled-data systems and its applications,” *Automatica*, vol. 40, no. 6, pp. 1043–1051, 2004.

-
- [85] M. De la Sen, “Preserving positive realness through discretization,” *Positivity*, vol. 6, no. 1, pp. 31–45, 2002.
- [86] E. Kreyszig, *Introductory functional analysis with applications*. Wiley, 1989.
- [87] R. M. Gray, *Toeplitz and circulant matrices: A review*. Now publishers, 2006.
- [88] G. Strang, “The discrete cosine transform,” *SIAM review*, vol. 41, no. 1, pp. 135–147, 1999.
- [89] V. Barnett and T. Lewis, *Outliers in statistical data*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, 2nd ed., 1984.
- [90] R. J. Little and D. B. Rubin, *Statistical analysis with missing data*. John Wiley & Sons, 2014.
- [91] R. K. Pearson, “Outliers in process modeling and identification,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 10, no. 1, pp. 55–63, 2002.
- [92] H. Liu, S. Shah, and W. Jiang, “On-line outlier detection and data cleaning,” *Computers & chemical engineering*, vol. 28, no. 9, pp. 1635–1647, 2004.
- [93] J. O. Smith, *Mathematics of the discrete Fourier transform (DFT) with audio applications*. W3K Publishing, 2007.
- [94] L. V. Ahlfors, *Complex Analysis*. McGraw-Hill, 1979.