

# Compendio de Ejercicios de Análisis de Sistemas Lineales

Rodrigo A. González

26 de julio de 2019



# Prefacio

Este apunte trata sobre *Análisis de Sistemas Lineales*, es decir, el conjunto de herramientas y conceptos matemáticos que permiten caracterizar el comportamiento de sistemas lineales dinámicos y estáticos. Si bien puede considerarse un tópico de las matemáticas, el interés y enfoque de este apunte se da en el contexto de la ingeniería electrónica. En este campo, las aplicaciones de los conceptos aquí estudiados se pueden encontrar en (tele)comunicaciones, control automático, modelamiento físico, identificación de sistemas, teoría de redes eléctricas, robótica, entre muchas otras áreas.

El objetivo de este apunte es entregar (con muy poco detalle) los contenidos esenciales de Análisis de Sistemas Lineales como es estudiado en ELO-104 en la UTFSM, con enfoque a *ejercicios y sus soluciones completas*. La estructura del apunte es simple: dividido en capítulos que usualmente merecen una evaluación separada, primero se entregan las ideas principales de cada tópico, y luego se proponen ejercicios en relación a esa temática. Los ejercicios están catalogados por su dificultad, siendo 🟩 el nivel más fácil, y 🟥🟥🟥 el más desafiante. Adicionalmente, se han incorporado comentarios en párrafos o en pie de página, donde se pretende dar intuición, presentar una generalización, o señalar distintos caminos para resolver un problema en particular. También se ha incorporado un apéndice sobre tópicos de matemática necesarios para entender los conceptos que se estudian en este apunte. Nótese que el propósito de este apunte es *complementar las clases, lectura, ayudantías y estudio personal del estudiante*. NO debe considerarse como el material central del curso, puesto que no se hicieron esfuerzos para incorporar la teoría a cabalidad.

La gran mayoría del texto fue escrito en el año 2016, mientras hacía la ayudantía de ELO-104. En un afán de dejar el apunte público, revisé y completé el apunte en 2019 durante mi tiempo libre. Cualquier errata o pregunta sobre el apunte, o sobre el tópico en general, no dude en escribirme a [rodrigo.agv@gmail.com](mailto:rodrigo.agv@gmail.com).

*Rodrigo A. González*

*Estocolmo, Suecia*

# Índice general

<b>1. Señales y Sistemas</b>	<b>4</b>
1.1. Definiciones de Señales y Sistemas . . . . .	4
1.2. ¿Por qué sistemas lineales? . . . . .	5
1.3. Sistemas Dinámicos y Algebraicos . . . . .	5
1.4. Linealidad . . . . .	6
1.5. Invariancia en el tiempo . . . . .	8
1.6. Linealización . . . . .	9
1.7. Señales Fundamentales . . . . .	15
<b>2. Análisis Temporal</b>	<b>20</b>
2.1. Ecuación Diferencial del Sistema (EDS) . . . . .	20
2.2. Estabilidad y Velocidad . . . . .	23
2.3. Respuesta a escalón unitario . . . . .	25
2.4. Cálculo de la respuesta de la EDS vía Convolución . . . . .	31
2.5. Ecuación Recursiva del Sistema (ERS) . . . . .	35
2.6. Cálculo de la respuesta de la ERS vía Convolución . . . . .	36
<b>3. Fourier: Análisis bajo excitaciones periódicas</b>	<b>37</b>
3.1. Respuesta en Frecuencia . . . . .	37
3.2. Series de Fourier para señales de tiempo continuo . . . . .	41
3.3. Teorema de Parseval para series de Fourier . . . . .	44
3.4. Transformada de Fourier . . . . .	46
3.5. Teorema de Parseval para Transformada de Fourier . . . . .	48
3.6. Aplicación en sistemas lineales . . . . .	49
3.7. Filtraje . . . . .	51
3.8. Serie de Fourier Discreta . . . . .	55
3.9. Transformada de Fourier de Tiempo Discreto . . . . .	56
<b>4. Laplace y Zeta: Análisis bajo excitaciones arbitrarias</b>	<b>58</b>
4.1. Transformada de Laplace: Definición . . . . .	58
4.2. Función de transferencia y EDS . . . . .	61
4.3. Análisis transiente en tiempo continuo . . . . .	65
4.4. Transformada Zeta: Definición . . . . .	68
4.5. Función de Transferencia y ERS . . . . .	70

<b>5. Representaciones de sistemas lineales</b>	<b>76</b>
5.1. Variables de Estado . . . . .	76
5.2. Diagramas de bloques . . . . .	84
5.3. Diagramas de Bode . . . . .	88
5.4. Diagramas de Nyquist . . . . .	93
<b>6. Sistemas Híbridos</b>	<b>98</b>
6.1. Muestreo y reconstrucción de señales . . . . .	98
6.2. Discretización de sistemas de tiempo continuo . . . . .	100
<b>7. Apéndice</b>	<b>104</b>
7.1. Números complejos . . . . .	104
7.2. Fracciones parciales . . . . .	106
7.2.1. Denominador con raíces distintas . . . . .	106
7.2.2. Denominador con una raíz múltiple . . . . .	107
7.3. Álgebra lineal . . . . .	108
7.3.1. Conceptos básicos . . . . .	108
7.3.2. Determinante . . . . .	109
7.3.3. Inversa de una matriz . . . . .	109
7.3.4. Autovalores y autovectores . . . . .	110
7.3.5. Diagonalización de una matriz . . . . .	110
7.3.6. Exponencial de una matriz . . . . .	112
7.4. Ecuaciones diferenciales ordinarias . . . . .	114
7.4.1. Ecuaciones diferenciales de primer orden . . . . .	114
7.4.2. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden . . . . .	114
7.4.3. Ecuaciones diferenciales de segundo orden . . . . .	115

# Capítulo 1

## Señales y Sistemas

En este capítulo se introducen las características fundamentales de sistemas. El principal enfoque está en *linealidad e invariancia en el tiempo*, dos propiedades que se utilizarán repetidamente a lo largo del apunte. Además, se entrega un método para linealizar sistemas dinámicos en algún punto de equilibrio, y se estudian las señales más importantes para analizar sistemas.

### 1.1. Definiciones de Señales y Sistemas

Comenzamos con definiciones básicas.

**Señal:** Una señal es una medición u observación que contiene información de interés, representada matemáticamente como función de una o más variables independientes. Por ejemplo, la función  $u : t \rightarrow u(t)$  usualmente denota la señal de entrada a un sistema, donde  $t$  es la variable de tiempo. Para evitar excesiva formalidad, generalmente nos referimos a esta señal por  $u(t)$  (aunque dependiendo del contexto,  $u(t)$  es simplemente la señal  $u$  evaluada en el tiempo  $t$ ).

**Sistema:** Un sistema es un ente organizado, resultante de la interconexión de elementos básicos, que según el juicio de un observador, tiene una finalidad y carácter determinado. También se define como cualquier proceso que produce una transformación de señales.

**Estado:** Señal o conjunto de señales internas u ocultas de un sistema. El estado del sistema recopila la información del pasado, para entregar una representación compacta de la información relevante para predecir el futuro. Normalmente nos referimos al estado con la señal  $\mathbf{x}(t)$ , la cual se escribe en negrita en este apunte por ser vector.

Una forma de representar gráficamente un sistema se muestra en la Figura 1.1, donde

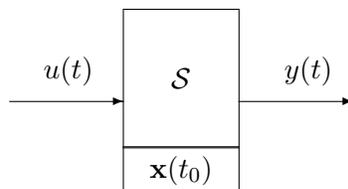


Figura 1.1: Representación compacta de un sistema.

$u(t)$  es la señal<sup>1</sup> que reúne todas las excitaciones del sistema,  $\mathbf{x}(t_0)$  es el vector que describe el estado del sistema en el tiempo  $t_0$  (*condición inicial* del sistema), e  $y(t)$  es la señal que reúne las señales escogidas como salidas.

Un sistema también se puede representar con la notación

$$y(t) = \mathbf{T}(\mathbf{x}(t_0), u(t)) \quad \forall t \geq t_0, \quad (1.1)$$

donde  $\mathbf{T}$  es una transformación que describe la dependencia entre la condición inicial  $\mathbf{x}(t_0)$  y entrada  $u(t)$ , y la salida  $y(t)$ .

## 1.2. ¿Por qué sistemas lineales?

Antes de comenzar a estudiar sistemas lineales, cabe preguntarse por qué se estudia este tipo de sistemas en particular. A continuación se detallan algunas razones:

1. Muchos sistemas pueden representarse por modelos lineales sencillos de razonable fidelidad. Ejemplos de esto son las redes eléctricas, o sistemas físicos descritos con mecánica Newtoniana.
2. Existen poderosas herramientas para analizar y sintetizar este tipo de sistemas. Ejemplos de éstas son las transformadas de Fourier, Laplace y Zeta, las cuales son de fácil aplicación y de gran utilidad conceptual y práctica.
3. En sistemas lineales, es posible explotar la propiedad de superposición para determinar fácilmente salidas de sistemas lineales de alta complejidad. Asimismo, veremos que para sistemas lineales que además son invariantes en el tiempo, basta conocer la respuesta a impulso de éste para conocer cómo se comportará el sistema frente a una señal *arbitraria*.

Desventaja: ¡Los sistemas reales NO son lineales! De hecho, cualquier sistema real presenta saturación para algún valor (suficientemente alto) de entrada. Sin embargo, en muchos casos es posible trabajar con modelos lineales aproximados de suficiente calidad.

## 1.3. Sistemas Dinámicos y Algebraicos

Las respuestas de un sistema pueden depender también de la información y/o energía existentes en el instante en el cual el comportamiento del sistema comienza a ser observado. Estos se llaman *sistemas dinámicos*. En cambio, un *sistema algebraico* sólo requiere el conocimiento de la entrada en el momento exacto de la observación de la salida.

**Ejercicio 1.3.1** (♣) *Considere el sistema*

$$\alpha \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{\beta \left[ \frac{du(t)}{dt} \right]^2 + e^{-\gamma u(t)}}{1 + \beta \left[ \frac{du(t)}{dt} \right]^2} u(t). \quad (1.2)$$

---

<sup>1</sup>Note que las entradas y salidas pueden ser señales multidimensionales. Sin embargo, para este apunte sólo se consideran entradas y salidas escalares, es decir, trataremos con sistemas *SISO* (*single-input single-output*).

Determine para qué valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  el sistema descrito en (1.2) es estático.

**Desarrollo.** La idea es manipular las variables para que desaparezcan las derivadas del sistema. Se puede ver directamente que se necesita que  $\alpha$  sea igual a cero. Analizando el lado derecho, notamos que si  $\beta = 0$ , se obtiene el sistema  $y(t) = u(t)e^{-\gamma u(t)}$ , el cual es estático para cualquier valor de  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Por otra parte, si  $\beta \neq 0$ , si se fija  $\gamma = 0$  se cancelan los factores del numerador y denominador de la parte derecha de (1.2), quedando  $y(t) = u(t)$ , el cual es un sistema estático. Para todos los tríos restantes, el sistema descrito en (1.2) es dinámico.  $\square$

## 1.4. Linealidad

Un sistema es lineal si satisface

$$\mathbf{T}\langle\alpha_1\mathbf{x}_1+\alpha_2\mathbf{x}_2,\beta_1u_1(t)+\beta_2u_2(t)\rangle=\alpha_1\mathbf{T}\langle\mathbf{x}_1,0\rangle+\alpha_2\mathbf{T}\langle\mathbf{x}_2,0\rangle+\beta_1\mathbf{T}\langle 0,u_1(t)\rangle+\beta_2\mathbf{T}\langle 0,u_2(t)\rangle \quad (1.3)$$

para cualquier valor de las constantes  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ , cualquier par de condiciones iniciales  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$ , y cualquier par de entradas  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$ . A continuación, cuando no exista confusión, a veces se omite la dependencia en  $t$  de las señales por simplicidad.

De la definición de linealidad se desprenden 2 conceptos fundamentales: superposición (respuesta de la suma es la suma de las respuestas) y homogeneidad (respuesta del escalamiento es el escalamiento de las respuestas).

**Ejercicio 1.4.1** (♣, Problema 1.1. de [1]) *Considere un sistema cuyo modelo de comportamiento está dado por:*

$$y(t) = mu(t) + b.$$

*Determine las condiciones que deben satisfacer las constantes  $m$  y  $b$  de modo que el sistema con entrada  $u(t)$  y respuesta  $y(t)$  sea lineal.*

**Desarrollo.** Dado que el sistema (1.4) es un sistema algebraico, no necesita de condiciones iniciales. Por ende, adecuamos la notación  $y(t) = \mathbf{T}\langle\mathbf{x}(t_0), u(t)\rangle = \mathbf{T}\langle u(t)\rangle$ . Considerando la definición dada en (1.3), determinamos las siguientes señales:

$$\begin{aligned} y_S &= \mathbf{T}\langle\alpha_1u_1 + \alpha_2u_2\rangle = m(\alpha_1u_1 + \alpha_2u_2) + b \\ \alpha_1y_{S_1} + \alpha_2y_{S_2} &= \alpha_1\mathbf{T}\langle u_1\rangle + \alpha_2\mathbf{T}\langle u_2\rangle = \alpha_1mu_1 + \alpha_2mu_2 + b\alpha_1 + b\alpha_2. \end{aligned}$$

Para que  $y_S = \alpha_1y_{S_1} + \alpha_2y_{S_2}$ , debe cumplirse  $b\alpha_1 + b\alpha_2 = b$ . Como la linealidad debe cumplirse para todo  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , debe tenerse  $b = 0$ . No se imponen restricciones sobre  $m$  pues se consigue igualdad en estos factores para todo  $m \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Ejercicio 1.4.2** (♣♣, Problema 1.9. de [1]) *Determine si el siguiente sistema es o no lineal*

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2ty(t) = 2u(t).$$

**Desarrollo.** Resolviendo la ecuación diferencial ordinaria (ver Apéndice 7.4), se puede escribir  $y(t)$  explícitamente como

$$y(t) = y_0e^{-(t^2-t_0^2)} + \int_{t_0}^t 2u(\tau)e^{-(t^2-\tau^2)}d\tau = \mathbf{T}\langle y_0, u(t)\rangle.$$

Entonces, se calculan las siguientes expresiones para constantes arbitrarias  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ , condiciones iniciales  $y_{01}, y_{02}$  y señales de entrada  $u_1, u_2$ :

$$\begin{aligned} y_S(t) &= \mathbf{T}\langle \alpha_1 y_{01} + \alpha_2 y_{02}, \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 \rangle \\ &= (\alpha_1 y_{01} + \alpha_2 y_{02})e^{-(t^2-t_0^2)} + \int_{t_0}^t 2(\beta_1 u_1(\tau) + \beta_2 u_2(\tau))e^{-(t^2-\tau^2)} d\tau \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\alpha_1 y_1(t) = \alpha_1 \mathbf{T}\langle y_{01}, 0 \rangle = \alpha_1 y_{01} e^{-(t^2-t_0^2)} \quad (1.5)$$

$$\alpha_2 y_2(t) = \alpha_2 \mathbf{T}\langle y_{02}, 0 \rangle = \alpha_2 y_{02} e^{-(t^2-t_0^2)} \quad (1.6)$$

$$\beta_1 y_3(t) = \beta_1 \mathbf{T}\langle 0, u_1 \rangle = \beta_1 \int_{t_0}^t 2u_1(\tau) e^{-(t^2-\tau^2)} d\tau \quad (1.7)$$

$$\beta_2 y_4(t) = \beta_2 \mathbf{T}\langle 0, u_2 \rangle = \beta_2 \int_{t_0}^t 2u_2(\tau) e^{-(t^2-\tau^2)} d\tau. \quad (1.8)$$

Sumando (1.5) hasta (1.8) y ordenando, se obtiene (1.4), con lo cual se satisface (1.3).  $\square$

**Ejercicio 1.4.3** (☹☹) *Determine si el siguiente sistema es o no lineal*

$$\left[ \frac{dy(t)}{dt} \right]^2 + y(t) = 2u(t). \quad (1.9)$$

**Desarrollo.** Producto del término cuadrático, es natural pensar que el sistema (1.9) es no lineal. Demostremos que el sistema no satisface la propiedad de superposición a la entrada. Para esto, consideremos la condición inicial igual a cero, y sean las señales  $y_1(t)$  y  $y_2(t)$  salidas producto de las entradas  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  respectivamente. Es decir,

$$y_1(t) = \mathbf{T}\langle 0, u_1(t) \rangle, \quad y_2(t) = \mathbf{T}\langle 0, u_2(t) \rangle. \quad (1.10)$$

Por otra parte, sea la señal  $y_3(t)$  salida producto de la entrada  $u_1(t) + u_2(t)$ , también con condición inicial cero. En otras palabras,  $y_3(t) = \mathbf{T}\langle 0, u_1(t) + u_2(t) \rangle$ . Se debe demostrar que  $y_3(t) \neq y_1(t) + y_2(t)$ .

Se sabe que  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$  e  $y_3(t)$  deben satisfacer las ecuaciones diferenciales

$$\left[ \frac{dy_1(t)}{dt} \right]^2 + y_1(t) = 2u_1(t), \quad (1.11)$$

$$\left[ \frac{dy_2(t)}{dt} \right]^2 + y_2(t) = 2u_2(t), \quad (1.12)$$

$$\left[ \frac{dy_3(t)}{dt} \right]^2 + y_3(t) = 2u_1(t) + 2u_2(t). \quad (1.13)$$

Reemplazando (1.11) y (1.12) en (1.13), se obtiene la igualdad

$$\left[ \frac{dy_3(t)}{dt} \right]^2 + y_3(t) = \left[ \frac{dy_1(t)}{dt} \right]^2 + \left[ \frac{dy_2(t)}{dt} \right]^2 + y_1(t) + y_2(t). \quad (1.14)$$

Argumentando por contradicción, supongamos que  $y_3(t) = y_1(t) + y_2(t)$ . Reemplazando en (1.14), se tiene

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d(y_1(t) + y_2(t))}{dt} \right]^2 + y_1(t) + y_2(t) &= \left[ \frac{dy_1(t)}{dt} \right]^2 + \left[ \frac{dy_2(t)}{dt} \right]^2 + y_1(t) + y_2(t) \\ \left[ \frac{dy_1(t)}{dt} \right]^2 + 2 \frac{dy_1(t)}{dt} \frac{dy_2(t)}{dt} + \left[ \frac{dy_2(t)}{dt} \right]^2 + y_1(t) + y_2(t) &= \left[ \frac{dy_1(t)}{dt} \right]^2 + \left[ \frac{dy_2(t)}{dt} \right]^2 + y_1(t) + y_2(t) \\ \implies \frac{dy_1(t)}{dt} \frac{dy_2(t)}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Dado que para señales de entrada  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  arbitrarias no necesariamente se cumple (1.15), por contradicción, tenemos que la suposición  $y_3(t) = y_1(t) + y_2(t)$  es incorrecta. Por ende,  $y_3(t) \neq y_1(t) + y_2(t)$ , lo que implica que el sistema (1.9) no cumple la propiedad de superposición en la entrada y por lo tanto no es lineal.  $\square$

## 1.5. Invariancia en el tiempo

Un sistema es invariante en el tiempo si se cumple que

$$\mathbf{T}\langle \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, u(t) \rangle = y(t) \implies \mathbf{T}\langle \mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}_0, u(t - \tau) \rangle = y(t - \tau), \quad \forall \tau > 0.$$



Figura 1.2: Propiedad de invariancia en el tiempo.

Intuitivamente, un sistema es invariante en el tiempo si el sistema responde de igual forma no importando cuando la entrada fue aplicada (en presencia de las mismas condiciones iniciales).

De aquí en adelante, un sistema lineal e invariante en el tiempo se abrevia como *sistema LTI*.

**Ejercicio 1.5.1** (☛) *Determine si el siguiente sistema es o no invariante en el tiempo*

$$y(t) = tu(t). \quad (1.16)$$

**Desarrollo.** Consideremos la notación  $y(t) = \mathbf{T}\langle u(t) \rangle$ , donde se omite la condición inicial por ser un sistema algebraico. Notemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\langle x_0, u(t - \tau) \rangle &= tu(t - \tau) \\ y(t - \tau) &= (t - \tau)u(t - \tau) \neq \mathbf{T}\langle x_0, u(t - \tau) \rangle, \end{aligned}$$

con lo cual se concluye que el sistema (1.16) es variante en el tiempo.  $\square$

**Ejercicio 1.5.2** (☛☛) Demuestre que el siguiente sistema es variante en el tiempo

$$\frac{dy(t)}{dt} = tu(t), \quad y(0) = y_0. \quad (1.17)$$

**Desarrollo.** En primer lugar, se determina  $\mathbf{T}\langle y(0) = y_0, u(t) \rangle$  explícitamente resolviendo la ecuación diferencial:

$$y(t) = \mathbf{T}\langle y(0) = y_0, u(t) \rangle = y_0 + \int_0^t \tau u(\tau) d\tau.$$

Ahora se procede a determinar  $y(t - T)$  como

$$y(t - T) = y_0 + \int_0^{t-T} \tau u(\tau) d\tau. \quad (1.18)$$

Por otra parte, se calcula  $\mathbf{T}\langle y(T) = y_0, u(t - T) \rangle$ :

$$\mathbf{T}\langle y(T) = y_0, u(t - T) \rangle = y_0 + \int_T^t \tau u(\tau - T) d\tau.$$

Haciendo el cambio de variable  $x = \tau - T$ , se obtiene

$$\mathbf{T}\langle y(T) = y_0, u(t - T) \rangle = y_0 + \int_0^{t-T} (x + T) u(x) dx, \quad (1.19)$$

con lo cual se ve que (1.18) y (1.19) no son iguales para todo  $T$  y para todo  $u(t)$ , y por lo tanto el sistema (1.17) es variante en el tiempo.

**Nota:** El lector puede comprobar que si se elimina el factor  $t$  de la parte derecha de la EDS en (1.17), el sistema es invariante en el tiempo.  $\square$

## 1.6. Linealización

Anteriormente, se ha afirmado que prácticamente todos los sistemas reales son no lineales. Para analizarlos, muchas veces conviene linealizarlos en algún punto de equilibrio, con lo cual se establece una región donde el sistema tiene comportamiento similar a un sistema lineal. A continuación se entrega una derivación sencilla que muestra cómo linealizar un sistema, y los pasos explícitos a seguir.

En general se tendrá una ecuación (EDO) no lineal de la forma

$$f_1\langle u(\circ), y(\circ) \rangle = f_2\langle u(\circ), y(\circ) \rangle, \quad (1.20)$$

donde  $f_1, f_2$  son operadores no lineales, posiblemente dinámicos<sup>2</sup>. Siempre se puede expresar (1.20) como

$$f\langle u(\circ), y(\circ) \rangle = 0 \iff f(u, u', u'', \dots, y, y', y'', \dots) = 0,$$

donde  $(\cdot)'$  denota la derivada de  $(\cdot)$ . Calculando serie de Taylor en torno a  $(u_Q, y_Q)$  hasta primer grado:

$$f\langle u_Q, y_Q \rangle + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_Q (u - u_Q) + \left. \frac{\partial f}{\partial u'} \right|_Q (u' - u'_Q) + \dots + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_Q (y - y_Q) + \dots = 0,$$

<sup>2</sup>Esto simplemente quiere decir que  $f_1$  y  $f_2$  son 'funciones' de la entrada y salida, y posiblemente derivadas de estas señales.

donde se fuerza  $f(u_Q, y_Q) = 0$  en el punto de equilibrio, y se establecen las variaciones  $\Delta u \triangleq u - u_Q$ ,  $\Delta y \triangleq y - y_Q$ , etc. Con esto, se ha construido una ecuación dinámica lineal en  $\Delta u$ ,  $\Delta y$ .

Un detalle no menor es que la derivación se extiende naturalmente a sistemas discretos, donde las ‘derivadas’  $u'$  e  $y'$  se deben interpretar como adelantos o retrasos de estas señales, según corresponda.

Para linear un sistema se recomienda seguir los siguientes pasos:

1. Identificar variables (señales).
2. Escribir estructura linealizada. Importante: derivadas (para tiempo continuo), y adelantos/retrasos (para tiempo discreto) se consideran como otra variable.
3. Determinar punto(s) de equilibrio igualando derivadas a cero en caso de tiempo continuo, e igualando los adelantos y retrasos de  $u[k]$  e  $y[k]$  a  $u_Q$  e  $y_Q$  respectivamente para el caso de tiempo discreto.
4. Cálculo de las constantes  $k_i = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_Q$ .

**Ejercicio 1.6.1** (🐞🐞, Problema 1.4. de [1]) *Considere un sistema con entrada  $u(t)$  y salida  $y(t)$ , relacionados con la ecuación diferencial*

$$\frac{dy(t)}{dt} + [2 + 0,1(y(t))^2] y(t) = 2u(t).$$

*Determine los modelos linealizados para un punto de operación definido por  $y_Q = 0,1$ . Repita para  $y_Q = 3$ .*

**Desarrollo.** Para  $y_Q = 0,1$ :

- Variables:  $\frac{dy(t)}{dt}, y(t), u(t)$ .

- Estructura linealizada:

$$k_1 \frac{\Delta y(t)}{dt} + k_2 \Delta y(t) = k_3 \Delta u(t).$$

- Punto de equilibrio: Se debe resolver la ecuación algebraica no lineal

$$[2 + 0,1(y_Q)^2] y_Q = 2u_Q,$$

con lo cual se obtiene  $(u_Q, y_Q) = (0,10005, 1/10)$ .

- Cálculo de  $k_i$  para  $i = 1, 2, 3$ :

$$k_1 = 1$$

$$k_2 = 2 + 0,3y_Q^2 = 2,003$$

$$k_3 = 2,$$

con lo cual se obtiene el modelo linealizado

$$\frac{\Delta y(t)}{dt} + 2,003 \Delta y(t) = 2 \Delta u(t).$$

Ahora, para  $y_Q = 3$ , sólo se debe volver a calcular el punto de equilibrio y  $k_2$ :

$$\begin{aligned} [2 + 0,1(y_Q)^2] y_Q = 2u_Q &\implies (u_Q, y_Q) = (4, 35, 3) \\ k_2 = 2 + 0,3y_Q^2 &= 4,7. \end{aligned}$$

Por ende, el modelo linealizado en torno a este punto de operación es

$$\frac{\Delta y(t)}{dt} + 4,7\Delta y(t) = 2\Delta u(t). \quad \square$$

**Ejercicio 1.6.2** (🐞🐞, Problema 1.10. de [1]) *Construya, si es posible, un modelo lineal para*

$$y[k] - 0,2y[k-1]y[k-2] + 0,4y[k-3] = \frac{u[k-1]}{1 + 0,2(u[k-2])^2}, \quad u_Q = 1.$$

**Desarrollo.**

- Variables:  $y[k], y[k-1], y[k-2], y[k-3], u[k-1], u[k-2]$ .
- Estructura linealizada:

$$k_1\Delta y[k] + k_2\Delta y[k-1] + k_3\Delta y[k-2] + k_4\Delta y[k-3] = k_5\Delta u[k-1] + k_6\Delta u[k-2].$$

- Punto de equilibrio: Se debe resolver la ecuación algebraica no lineal

$$y_Q - 0,2(y_Q)^2 + 0,4y_Q = \frac{u_Q}{1 + 0,2(u_Q)^2}, \quad u_Q = 1,$$

con lo cual se obtienen los puntos de equilibrio  $(u_{Q1}, y_{Q1}) = \left(1, \frac{7}{2} + \sqrt{\frac{97}{12}}\right)$  y  $(u_{Q2}, y_{Q2}) = \left(1, \frac{7}{2} - \sqrt{\frac{97}{12}}\right)$ . A modo de ilustración, en este ejercicio sólo se estudiará la linealización asociada a  $(u_{Q1}, y_{Q1})$ .

- Cálculo de  $k_i, i = 1, \dots, 6$ :

$$\begin{aligned} k_1 &= 1 \\ k_2 &= -0,2y_{Q1} = -\frac{7}{10} - \frac{1}{5}\sqrt{\frac{97}{12}} \\ k_3 &= -0,2y_{Q1} = -\frac{7}{10} - \frac{1}{5}\sqrt{\frac{97}{12}} \\ k_4 &= 0,4 \\ k_5 &= \frac{1}{1 + 0,2(u_{Q1})^2} = \frac{5}{6} \\ k_6 &= -u_{Q1} \frac{0,4u_{Q1}}{[1 + 0,2(u_{Q1})^2]^2} = \frac{-5}{18}. \end{aligned}$$

Se concluye que el modelo linealizado es

$$\Delta y[k] - \left(\frac{7}{10} + \frac{1}{5}\sqrt{\frac{97}{12}}\right) \Delta y[k-1] - \left(\frac{7}{10} + \frac{1}{5}\sqrt{\frac{97}{12}}\right) \Delta y[k-2] + \frac{4}{10} \Delta y[k-3] = \frac{5}{6} \Delta u[k-1] - \frac{5}{18} \Delta u[k-2].$$

□

**Ejercicio 1.6.3** (☛☛) *Obtenga la estructura lineal, las fórmulas de las constantes de linealización, punto de equilibrio para  $m_Q = M$  y el modelo linealizado del sistema no lineal descrito por*

$$\frac{dp(t)}{dt} = -[M + m(t)]g - kx(t) - \frac{b}{M} \left( p(t) - \frac{m(t)q(t)}{A} \right) - \frac{\rho}{a} q^2(t) \quad (1.21)$$

$$\frac{dm(t)}{dt} = \rho q(t) \quad (1.22)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{p(t)}{M} - \frac{m(t)q(t)}{MA}. \quad (1.23)$$

**Desarrollo.**

- Variables:  $m(t), x(t), p(t), q(t), \frac{dp(t)}{dt}, \frac{dm(t)}{dt}, \frac{dx(t)}{dt}$ .

- Estructura linealizada:

$$\frac{d\Delta p(t)}{dt} = k_1 \Delta m(t) + k_2 \Delta x(t) + k_3 \Delta p(t) + k_4 \Delta q(t)$$

$$\frac{d\Delta m(t)}{dt} = k_5 \Delta q(t)$$

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} = k_6 \Delta p(t) + k_7 \Delta m(t) + k_8 \Delta q(t).$$

- Punto de equilibrio: A partir de (1.22), vemos que  $q_Q = 0$ . Por (1.23), obtenemos  $p_Q = 0$ . Gracias a que  $m_Q = M$ , la ecuación (1.21) conduce a  $x_Q = -2Mg/k$ .
- Cálculo de  $k_i, i = 1, \dots, 8$ : Procediendo de la forma usual, calculamos

$$k_1 = -g, \quad k_2 = -k, \quad k_3 = -\frac{b}{M}, \quad k_4 = \frac{b}{A},$$

$$k_5 = \rho, \quad k_6 = \frac{1}{M}, \quad k_7 = 0, \quad k_8 = -\frac{1}{A}.$$

Entonces, el modelo linealizado en torno al punto de equilibrio calculado es

$$\frac{d\Delta p(t)}{dt} = -g\Delta m(t) - k\Delta x(t) - \frac{b}{M}\Delta p(t) + \frac{b}{A}\Delta q(t)$$

$$\frac{d\Delta m(t)}{dt} = \rho\Delta q(t)$$

$$\frac{d\Delta x(t)}{dt} = \frac{1}{M}\Delta p(t) - \frac{1}{A}\Delta q(t). \quad \square$$

**Ejercicio 1.6.4** (☛☛☛) *Considere el circuito eléctrico de la Figura 1.3, donde la componente en la parte derecha corresponde a una resistencia no lineal cuya curva voltaje-corriente está dada por el gráfico adjunto.*

*Si  $R = 2[\Omega]$ ,  $C = 0,5[F]$  y  $u(t) = 8[V]$ , determine todos los puntos de equilibrio  $(v_Q, i_Q)$ , y linealice el sistema en cada punto de equilibrio obtenido, donde  $u(t)$  corresponde a la entrada y  $v(t)$  a la salida.*

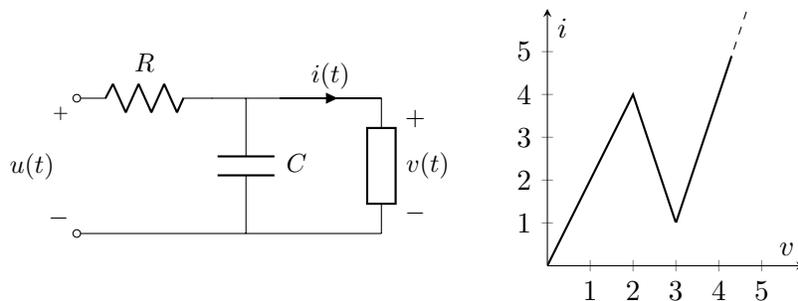


Figura 1.3: Izquierda: circuito eléctrico con componente no lineal. Derecha: Gráfico voltaje-corriente de esa componente.

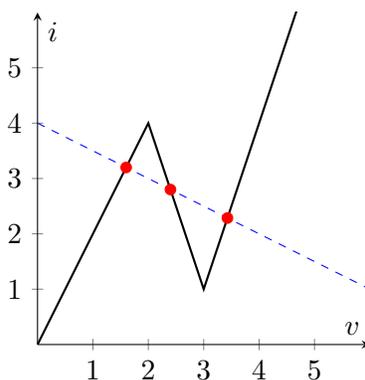
**Desarrollo.** Si definimos  $i_1(t)$  como la corriente por la resistencia  $R$ , tenemos por la ley de voltajes de Kirchhoff que  $u(t) = Ri_1(t) + v(t)$ . Entonces, la ecuación característica del capacitor conduce a

$$C \frac{dv(t)}{dt} = i_1(t) - i(t) = \frac{u(t) - v(t)}{R} - i(t).$$

Por ende, en estado estacionario los puntos de equilibrio  $(v_Q, i_Q)$  deben satisfacer

$$\frac{8 - v_Q}{2} = i_Q.$$

Como los puntos de equilibrio deben satisfacer la curva característica de la resistencia no lineal, éstos pueden ser encontrados intersectando curvas, como se muestra en la figura.



Los siguientes puntos de equilibrio se obtienen:

$$(v_{Q1}, i_{Q1}) = \left(\frac{8}{5}, \frac{16}{5}\right), \quad (v_{Q2}, i_{Q2}) = \left(\frac{12}{5}, \frac{14}{5}\right), \quad (v_{Q3}, i_{Q3}) = \left(\frac{24}{7}, \frac{16}{7}\right).$$

Si denotamos  $f(v)$  como la función que relaciona  $v(t)$  con  $i(t)$ , el modelo linealizado en el punto de equilibrio  $(v_Q, i_Q)$  está dado por

$$C \frac{d}{dt} \Delta v(t) = \left( -\frac{1}{R} - \left. \frac{f(v)}{dv} \right|_{v=v_Q} \right) \Delta v(t) + \frac{1}{R} \Delta u(t).$$

Reemplazando apropiadamente, se llega a los siguientes tres sistemas linealizados:

$$\text{Para } (v_{Q1}, i_{Q1}) : \frac{d}{dt} \Delta v(t) = -5\Delta v(t) + \Delta u(t),$$

$$\text{Para } (v_{Q2}, i_{Q2}) : \frac{d}{dt} \Delta v(t) = 5\Delta v(t) + \Delta u(t),$$

$$\text{Para } (v_{Q3}, i_{Q3}) : \frac{d}{dt} \Delta v(t) = -7\Delta v(t) + \Delta u(t).$$

**Nota:** Puede verse que  $(v_{Q1}, i_{Q1})$  y  $(v_{Q3}, i_{Q3})$  conducen a sistemas linealizados estables, mientras que el sistema linealizado con  $(v_{Q2}, i_{Q2})$  es inestable. Más aún, puede concluirse que  $(v_{Q1}, i_{Q1})$  y  $(v_{Q3}, i_{Q3})$  son *atractores*, mientras que  $(v_{Q2}, i_{Q2})$  es un *repulsor*.  $\square$

**Ejercicio 1.6.5** (👉👉) A partir del diagrama de bloques<sup>3</sup> de la figura, determine la ecuación del sistema no lineal, linealícela en torno al punto de operación  $y_Q = 3$ , y represéntela en un diagrama de bloques.

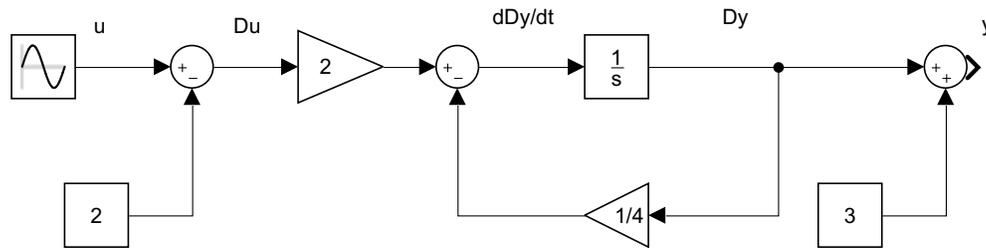


Figura 1.4: Diagrama de bloques de sistema no lineal.

**Desarrollo.** Del diagrama de bloques, se puede obtener la siguiente ecuación diferencial no lineal:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{u^2}{2} - \sqrt{y+1}. \quad (1.24)$$

Al igualar la parte derecha de (1.24) a cero, se obtiene el punto de equilibrio  $(u_Q, y_Q) = (2, 3)$ . La ecuación linealizada del sistema es

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta y}{dt} &= u_Q \Delta u - \frac{1}{2\sqrt{y_Q+1}} \Delta y \\ &= 2\Delta u - \frac{1}{4} \Delta y. \end{aligned}$$

Esto se puede representar en el diagrama de bloques de Simulink<sup>4</sup> de la Figura 1.5.  $\square$

<sup>3</sup>Ejercicios sobre diagramas de bloque se encuentran en el Capítulo 5. Este problema es sólo para entender linealización en un contexto un poco más práctico. Por si no lo ha estudiado antes, el bloque  $\frac{1}{s}$  corresponde a un integrador.

<sup>4</sup>Note que se han sumado las constantes 2 y 3 en la entrada y salida respectivamente. Estos valores corresponden al punto de equilibrio, y son necesarios para simular correctamente, pues  $\Delta u(t) = u(t) - 2$ ,  $\Delta y(t) = y(t) - 3$ .

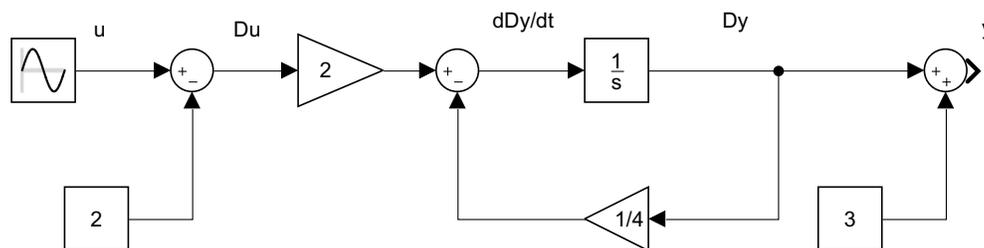


Figura 1.5: Diagrama de bloques de sistema lineal.

## 1.7. Señales Fundamentales

A continuación se describen las señales fundamentales estudiadas a lo largo de este apunte.

- **Escalón Unitario (función de Heaviside):** El escalón unitario en el instante  $t_0$  se define como:

$$\mu(t - t_0) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq t_0, \\ 0 & \text{si } t < t_0. \end{cases}$$

- **Impulso Unitario (delta de Dirac):** El delta de Dirac satisface

$$\delta(t - t_0) = 0 \quad \forall t \neq t_0 \quad \text{con} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1.$$

También puede entenderse el delta de Dirac como la derivada del escalón unitario:

$$\frac{d\mu(t - t_0)}{dt} = \delta(t - t_0).$$

- **Rampa unitaria:** La rampa unitaria se define como:

$$r(t - t_0) \triangleq \begin{cases} t - t_0 & \text{si } t \geq t_0, \\ 0 & \text{si } t < t_0. \end{cases}$$

Note que  $\frac{dr(t)}{dt} = \mu(t)$ .

- **Exponencial:** La función exponencial se define genéricamente como

$$f(t) = e^{\alpha t},$$

con  $\alpha = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}$ . Combinada con su complejo conjugado, se pueden formar sinusoidales con amplitud exponencial, de la forma

$$f(t) = Ae^{\sigma t} \sin(\omega t + \beta).$$

Esto permite obtener exponenciales reales (al hacer  $\omega = 0$ ) como también sinusoidales puras (al hacer  $\sigma = 0$ ).

■ **Único caso no análogo para tiempo discreto: El delta de Kronecker**

Todas las señales anteriormente descritas se extienden naturalmente al caso de tiempo discreto, salvo el impulso unitario. En vez de esta señal, se define el delta de Kronecker como

$$\delta_K[t - t_0] \triangleq \begin{cases} 0 & \text{si } t \neq t_0, \\ 1 & \text{si } t = t_0. \end{cases}$$

**Ejercicio 1.7.1** (☛, Problema 2.6. de [1]) *Determine una expresión analítica, usando deltas de Dirac si es necesario, para la derivada de cada una de las siguientes funciones:*

1.  $f_1(t) = \sin\left(3t - \frac{\pi}{3}\right) \mu\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$ .

2.  $f_2(t) = [r(t) - 2r(t - 2)]\mu(-t + 4)$ .

**Desarrollo.**

1. Para  $f_1(t)$ : Aplicando derivada del producto y propiedades del delta de Dirac, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{df_1(t)}{dt} &= 3 \cos\left(3t - \frac{\pi}{3}\right) \mu\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(3t - \frac{\pi}{3}\right) \delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 3 \cos\left(3t - \frac{\pi}{3}\right) \mu\left(t - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) \delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 3 \cos\left(3t - \frac{\pi}{3}\right) \mu\left(t - \frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2} \delta\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } t < \frac{\pi}{2}, \\ \frac{-1}{2} \delta(0) & \text{si } t = \frac{\pi}{2}, \\ 3 \cos\left(3t - \frac{\pi}{3}\right) & \text{si } t > \frac{\pi}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

2. Para  $f_2(t)$ : Nuevamente, aplicando derivada del producto y propiedades de la rampa, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{df_2(t)}{dt} &= [\mu(t) - 2\mu(t - 2)]\mu(-t + 4) - [r(t) - 2r(t - 2)]\delta(-t + 4) \\ &= [\mu(t) - 2\mu(t - 2)]\mu(-t + 4) - [r(4) - 2r(2)]\delta(-t + 4) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 2, \\ -1 & \text{si } 2 \leq t < 4, \\ 0 & \text{si } (t < 0) \text{ ó } (t \geq 4). \end{cases} \quad \square \end{aligned}$$

**Ejercicio 1.7.2** (☛☛) *Obtenga una expresión explícita para cada una de las señales de la Figura 1.6.*

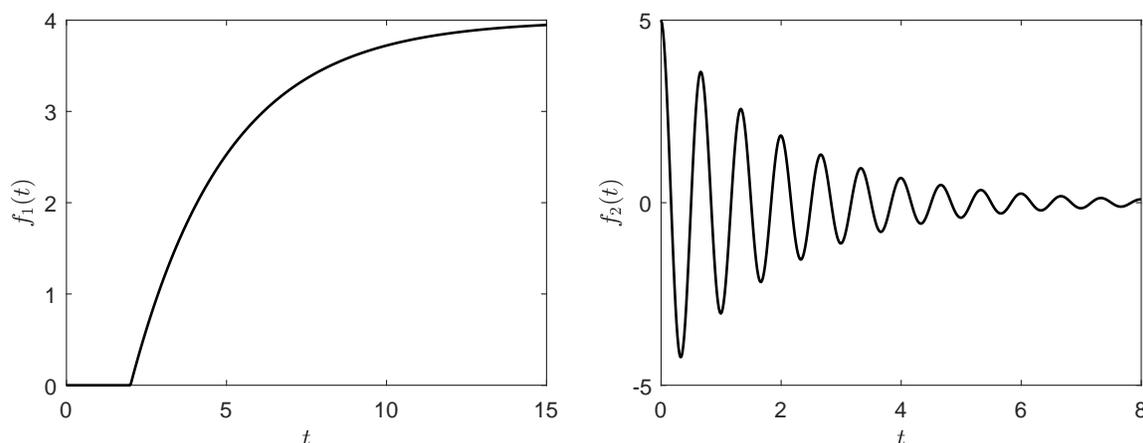


Figura 1.6: Señales  $f_1(t)$  (izquierda),  $f_2(t)$  (derecha).

### Desarrollo.

- Para  $f_1(t)$ : La señal presenta un retardo de dos unidades de tiempo. Después de este instante, la señal corresponde a una exponencial con exponente negativo, pues se estaciona en un valor finito, a diferencia del exponente positivo, el cual provoca un crecimiento sin límite. Sabiendo que el valor final de  $f_1(t)$  es 4, y se consigue una aproximación razonable a este valor en 12 unidades de tiempo (correspondientes a 4 constantes de tiempo  $\tau$  aproximadamente), se deduce que la función puede escribirse como

$$f_1(t) = 4 \left( 1 - e^{-\frac{t-2}{3}} \right) \mu(t-2).$$

**Nota:** La constante de tiempo también puede estimarse (de forma más precisa) con la tangente de la función en  $t = 2$ . Sin considerar el retardo, la constante de tiempo corresponde aproximadamente al punto en el eje temporal en donde la tangente alcanza el valor final de la función.

- Para  $f_2(t)$ : Por la forma, se deduce de inmediato que la función es una sinusoidal con envolvente exponencial. Notando que el punto máximo de la sinusoidal se encuentra en  $t = 0$ , puede considerarse la parte sinusoidal como un coseno sin retardo, con amplitud 5. Dado que el segundo valle se produce exactamente en  $t = 1$ , el cual corresponde a  $\cos(3\pi)$ , se deduce que  $\omega = 3\pi$ . Finalmente, al dibujar la envolvente de la señal se puede ver que la constante de tiempo de la exponencial es aproximadamente 2. Con esto, se concluye que

$$f_2(t) = 5e^{-\frac{t}{2}} \cos(3\pi t). \quad \square$$

**Ejercicio 1.7.3** (☞☞) Encuentre la expresión analítica para cada una de las señales de la Figura 1.7, y la integral de éstas. Además, grafique la integral de cada señal.

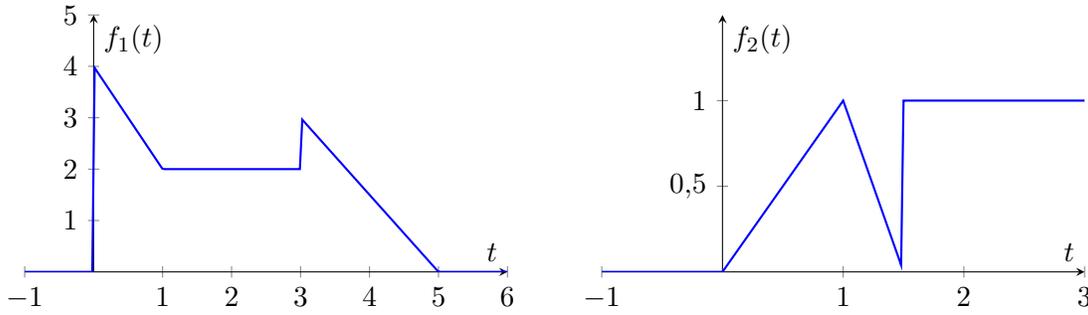


Figura 1.7: Señales compuestas.

**Desarrollo.**

- Para  $f_1(t)$ : Observando la gráfica, notamos que

$$f_1(t) = 4\mu(t) - 2r(t) + 2r(t-1) + \mu(t-3) - \frac{3}{2}r(t-3) + \frac{3}{2}r(t-5)$$

$$= \begin{cases} 4 - 2t & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ 2 & \text{si } 1 \leq t < 3, \\ \frac{15}{2} - \frac{3t}{2} & \text{si } 3 \leq t < 5, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por lo tanto, la integral de la señal pedida es<sup>5</sup>

$$\int_{-\infty}^t f_1(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 4t - t^2 & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ 2t + 1 & \text{si } 1 \leq t < 3, \\ -\frac{3}{4}t^2 + \frac{15}{2}t - \frac{35}{4} & \text{si } 3 \leq t < 5, \\ 10 & \text{si } t \geq 5. \end{cases}$$

- Para  $f_2(t)$ : Observando la gráfica, vemos que

$$f_2(t) = r(t) - 3r(t-1) + 2r\left(t - \frac{3}{2}\right) + \mu\left(t - \frac{3}{2}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ t & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ 3 - 2t & \text{si } 1 \leq t < \frac{3}{2}, \\ 1 & \text{si } t \geq \frac{3}{2}. \end{cases}$$

<sup>5</sup>Una forma de comprobar estos resultados es evaluar en los puntos  $t = 1, 3, 5$  y comparar con el área bajo la curva de la Figura 1.7. Además, debe cumplirse que la integral de una señal es una función continua (a no ser que  $f(t)$  se componga de algún delta de Dirac, lo cual no es el caso acá).

Por lo tanto, la integral de la señal  $f_2(t)$  es

$$\int_{-\infty}^t f_2(\tau) d\tau = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ \frac{t^2}{2} & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ -t^2 + 3t - \frac{3}{2} & \text{si } 1 \leq t < \frac{3}{2}, \\ t - \frac{3}{4} & \text{si } t \geq \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Finalmente, las señales graficadas se encuentran en la Figura 1.8. □

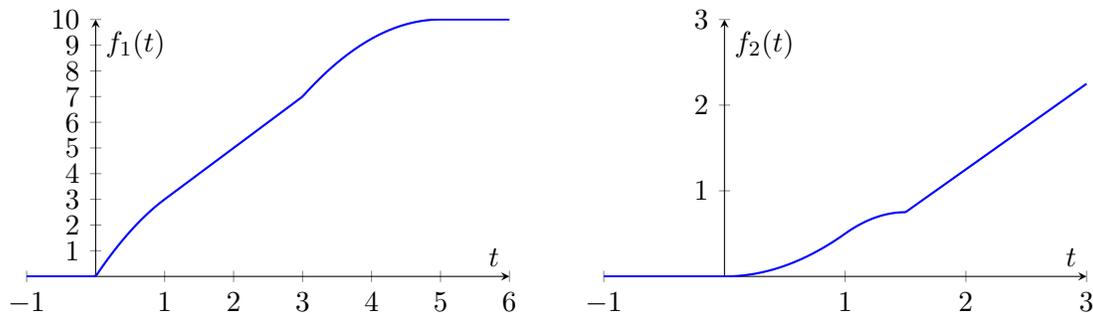


Figura 1.8: Integral de las señales  $f_1(t)$  y  $f_2(t)$ .

# Capítulo 2

## Análisis Temporal

Este capítulo revisa algunos conceptos de ecuaciones diferenciales y ecuaciones recursivas. Estas ecuaciones son base para el análisis de sistemas lineales en tiempo continuo y discreto respectivamente, dado que cualquier sistema LTI se puede expresar como un sistema de ecuaciones diferenciales o recursivas.

Primero se analiza la solución de estos sistemas, y las propiedades que se observan gracias a la linealidad e invariancia. Luego se estudia la respuesta a escalón unitario, la cual otorga una caracterización de un sistema LTI. Finalmente, se revisa la operación convolución, la cual permite obtener la respuesta de un sistema LTI frente a una señal de entrada *arbitraria*.

### 2.1. Ecuación Diferencial del Sistema (EDS)

La Ecuación Diferencial de un Sistema (EDS) es un modelo dinámico que describe una relación fundamental sobre ciertas combinaciones de la entrada, salida, y algunas derivadas de ambas señales.

La solución de la EDS (respuesta del sistema), tiene 2 componentes:

1. Componente homogénea o natural  $y_h(t)$ : Captura la naturaleza intrínseca del sistema. Se obtiene resolviendo la EDS con  $u(t) \equiv 0$ . Depende de las condiciones iniciales.
2. Componente particular o forzada  $y_p(t)$ : Captura la respuesta del sistema que depende únicamente de la entrada. Es decir, no depende de las condiciones iniciales.

Una forma alternativa es expresar la respuesta como la suma entre la respuesta a condiciones iniciales  $y_x(t) = \mathbf{T}\langle x_0, 0 \rangle$  y la respuesta a estímulo  $y_u(t) = \mathbf{T}\langle 0, u(t) \rangle$ . Se tiene  $y(t) = \mathbf{T}\langle x_0, 0 \rangle + \mathbf{T}\langle 0, u(t) \rangle = y_x(t) + y_u(t) = y_h(t) + y_p(t)$ . Note que las condiciones iniciales se incorporan de forma distinta en ambos métodos.

De estas definiciones, se desprenden los conceptos de modos naturales y forzados. Un pequeño resumen de esto se encuentra a continuación:

	$y_h(t)$	$y_p(t)$	$y_x(t)$	$y_u(t)$
Modos naturales	✓		✓	✓
Modos forzados		✓		✓

Los sistemas lineales exhiben ganancias distintas para modos forzantes distintos. Esto es clave para el análisis y diseño de sistemas.

**Ejercicio 2.1.1** (☛☛☛) Determine la EDS que relaciona la entrada  $v_f(t)$  con la salida  $v_c(t)$  del circuito de la Figura 2.1, y estudie sus soluciones. Posteriormente, obtenga  $v_c(t)$  para  $v_f(t) = \mu(t)$ ,  $R = 3[\Omega]$ ,  $C = 1/2[F]$ ,  $L = 1[H]$ , sujeto a las condiciones iniciales  $v_c(0) = -1$ ,  $dv_c(0)/dt = 1$ . Además, descomponga la solución en componentes particular y homogénea, y respuesta a condiciones iniciales y a estímulo.

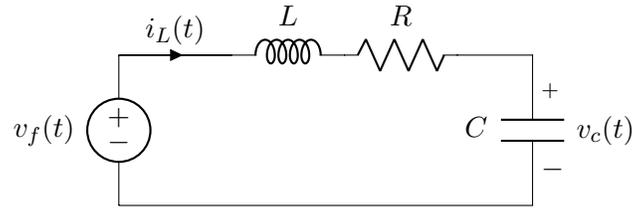


Figura 2.1: Circuito RLC.

**Desarrollo.** Por la ley de voltajes de Kirchhoff, y luego reemplazando por las ecuaciones propias de cada componente, se tiene

$$\begin{aligned} v_f(t) &= v_L(t) + i_L(t)R + v_c(t) \\ &= L \frac{di_L(t)}{dt} + RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) \end{aligned}$$

con lo cual se obtiene la ecuación diferencial<sup>1</sup>

$$v_f(t) = LC \frac{d^2v_c(t)}{dt^2} + RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t). \quad (2.1)$$

Encontramos la solución de la ecuación homogénea a través del polinomio característico:

$$\begin{aligned} LC\lambda^2 + RC\lambda + 1 &= 0 \\ \implies \lambda &= \frac{-RC \pm \sqrt{R^2C^2 - 4LC}}{2LC}. \end{aligned}$$

Aquí es posible proponer algunos ejemplos para ilustrar distintas formas típicas de la solución homogénea:

- $R = 3[\Omega]$ ,  $C = 1/2[F]$ ,  $L = 1[H]$ : La solución homogénea es

$$v_{ch}(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}.$$

Es decir, 2 exponenciales decrecientes. Se puede demostrar que no es posible obtener una exponencial creciente, pues  $RC > \sqrt{R^2C^2 - 4LC}$  para todo  $R, L, C > 0$  tal que el argumento de la raíz sea positivo (¡Esto físicamente tiene mucho sentido!).

- $R = 0[\Omega]$ ,  $C = 1[F]$ ,  $L = 1[H]$ : La solución homogénea es

$$\begin{aligned} v_{ch}(t) &= C_1 e^{jt} + C_2 e^{-jt} \\ &= \overline{C_1} \cos(t) + \overline{C_2} \sin(t). \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Note que las condiciones iniciales están comúnmente dadas por  $v_c(0) = v_{c0}$ , e  $i_L(0) = i_{L0}$ . Esta última puede dejarse expresada en función de  $v_c$  como  $dv_c(0)/dt = i_L(0)/C$ .

En este caso, la solución homogénea para condiciones iniciales distintas de cero NO converge a cero a medida que  $t \rightarrow \infty$ . Dado que no hay una componente disipativa de energía, la energía inicial dada por las condiciones iniciales se conserva en el sistema para siempre.

- $R = 1[\Omega]$ ,  $C = 1[F]$ ,  $L = 1[H]$ : La solución homogénea es

$$v_{ch}(t) = C_1 e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right),$$

con lo cual se obtienen exponenciales complejas, que decaen a cero a medida que  $t \rightarrow \infty$ .

- $R = 2[\Omega]$ ,  $C = 1[F]$ ,  $L = 1[H]$ : La solución homogénea es

$$v_{ch}(t) = C_1 e^{-t} + C_2 t e^{-t}.$$

El autovalor asociado es  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ , lo cual implica que se tiene un modo natural con multiplicidad 2. Las soluciones nuevamente son estables, pues  $\lim_{t \rightarrow \infty} t e^{-t} = 0$ .

Ahora, obtengamos la respuesta a escalón del sistema dado por (2.1) para  $R = 3[\Omega]$ ,  $C = 1/2[F]$ ,  $L = 1[H]$ , sujeto a las condiciones iniciales  $v_c(0) = -1$ ,  $dv_c(0)/dt = 1$ . Para esto, determinaremos las componentes de la respuesta a escalón por separado. Partimos con componentes particular y homogénea.

- $v_{cp}(t)$ : Analicemos una solución constante de la forma  $v_{cp}(t) = P$ . Debe cumplirse

$$v_{cp}(t) = P = 1.$$

- $v_{ch}(t)$ : Haciendo  $u \equiv 0$ , resolvemos la ecuación homogénea, obteniéndose

$$v_{ch}(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}.$$

Por lo tanto, se tiene como solución

$$v_c(t) = v_{cp}(t) + v_{ch}(t) = 1 + C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}.$$

Imponiendo las condiciones iniciales, se obtiene finalmente que

$$v_c(t) = v_{cp}(t) + v_{ch}(t) = 1 - 3e^{-t} + e^{-2t}.$$

Ahora obtengamos la respuesta a condiciones iniciales  $v_{cx}(t)$  y la respuesta a estímulo  $v_{cu}(t)$ .

- $v_{cx}(t)$ : La respuesta a entrada cero y condiciones iniciales  $v_c(0) = -1$ ,  $dv_c(0)/dt = 1$  es

$$v_{cx}(t) = -e^{-t}.$$

- $v_{cu}(t)$ : Haciendo  $u = 1$ , resolvemos la ecuación para condiciones iniciales iguales a cero. Resolvemos la ecuación homogénea y la particular para este caso, obteniéndose como solución

$$v_{cu}(t) = 1 - 2e^{-t} + e^{-2t}.$$

Entonces, la solución general se expresa como

$$v_c(t) = v_{cx}(t) + v_{cu}(t) = 1 - 3e^{-t} + e^{-2t}.$$

En resumen, se han obtenido los siguientes resultados:

	$v_{ch}(t)$	$v_{cp}(t)$	$v_{cx}(t)$	$v_{cu}(t)$
Modos naturales	$-3e^{-t} + e^{-2t}$		$-e^{-t}$	$-2e^{-t} + e^{-2t}$
Modos forzados		1		1

□

## 2.2. Estabilidad y Velocidad

Intuitivamente, un sistema lineal es estable si para toda entrada acotada, se tiene salida acotada (estabilidad BIBO). Matemáticamente, esto significa que todos los modos naturales del sistema caen asintóticamente a cero. Esto se consigue en el caso de sistemas de tiempo continuo si y sólo si la parte real de cada frecuencia natural es estrictamente menor a cero.

Por otra parte, la velocidad de un sistema guarda relación con el tiempo relativo en que decaen los modos naturales. El modo dominante de un sistema es aquel que decae más lentamente, y la tasa de decaimiento depende de la parte real de la frecuencia natural. Los sistemas son más rápidos cuanto más alejados del eje imaginario están sus frecuencias naturales dominantes.

**Ejercicio 2.2.1** (👉👉, Problema 3.5 de [1]) *La ecuación característica de un sistema de tiempo continuo está dada por*

$$\lambda^2 + \alpha\lambda + 4 = 0. \quad (2.2)$$

*Determine el rango de valores de  $\alpha$  que hacen estable al sistema (2.2), y dentro de ese rango determine el valor de  $\alpha$  de modo que el sistema sea lo más rápido posible.*

**Desarrollo.** En primer lugar, determinamos los polos o valores propios del sistema:

$$\lambda_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 16}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 16}}{2}.$$

Se debe tener  $\text{Re}\{\lambda_1\} < 0$  y  $\text{Re}\{\lambda_2\} < 0$ . Sumando ambas ecuaciones, se deduce que debe tenerse  $\alpha > 0$ .

- Para  $0 < \alpha \leq 4$ , se tiene  $\alpha^2 - 16 \leq 0$  y por ende  $\text{Re}\{\lambda_1\} = \text{Re}\{\lambda_2\} = \frac{-\alpha}{2} < 0$ .
- Para  $\alpha > 4$ , se tiene  $\text{Re}\{\lambda_2\} < 0$  y sólo se necesita ver si  $\lambda_1 < 0$ , lo cual se puede comprobar con álgebra elemental.

Por ende, para estabilidad es necesario y suficiente que  $\alpha > 0$ .

**Nota:** Como caso general, puede demostrarse que si la ecuación característica de un sistema de tiempo continuo está dada por  $\lambda^2 + \alpha\lambda + \beta = 0$ , el sistema será estable si y sólo si  $\alpha > 0$  y  $\beta > 0$ .

Ahora, para determinar el valor de  $\alpha$  donde se consigue mayor velocidad, se debe calcular

$$\max_{\alpha > 0} \min\{|\text{Re}\{\lambda_1(\alpha)\}|, |\text{Re}\{\lambda_2(\alpha)\}|\}.$$

Sabiendo que

$$\min\{|\operatorname{Re}\{\lambda_1(\alpha)\}|, |\operatorname{Re}\{\lambda_2(\alpha)\}|\} = \begin{cases} \frac{\alpha}{2} & \text{si } 0 < \alpha \leq 4, \\ \frac{\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 16}}{2} & \text{si } \alpha > 4, \end{cases}$$

se deduce que para  $\alpha = 4$  se tiene velocidad máxima, es decir, para  $\alpha = 4$  los autovalores se encuentran ambos lo más alejado posible del eje imaginario.

Esto se puede ver con una perspectiva geométrica en la Figura 2.2. En azul se encuentran los posibles valores reales del par de polos  $(\lambda_1, \lambda_2)$ . La intersección de cada recta con la hipérbola  $\lambda_1\lambda_2 = 4$  entrega los valores de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  que satisfacen la ecuación característica con  $\alpha = 4, 5, 6$  respectivamente. Note que con  $\alpha = 4$  se consigue que el mínimo autovalor (en módulo) sea el mayor posible. Interessantemente, también se puede ver que si  $-4 < \alpha < 4$ , las rectas no intersecan a la hipérbola, lo cual confirma que los autovalores para este rango de  $\alpha$  serán números complejos.

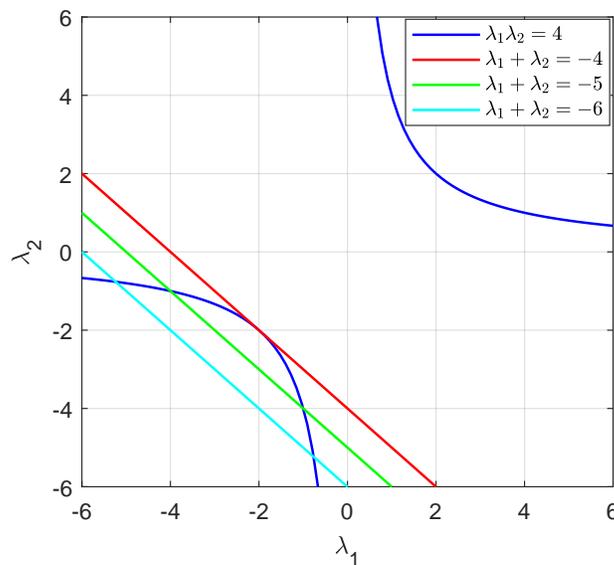


Figura 2.2: Diagrama que entrega la ubicación de las raíces de la ecuación característica para los valores  $\alpha = 4, 5, 6$ .

**Nota:** En la práctica, es probable que con otra configuración de polos (complejos conjugados), se pueda obtener una respuesta a escalón o a impulso más rápida, en cuanto a que ésta se acerca comparativamente en menor tiempo a valores cercanos al valor final, pero a costa de incluir factores oscilatorios y/o overshoot/undershoot.  $\square$

**Ejercicio 2.2.2** (👉) *Se calculan los polos de dos sistemas y se dibujan en el plano complejo, como se muestra en la Figura 2.3.*

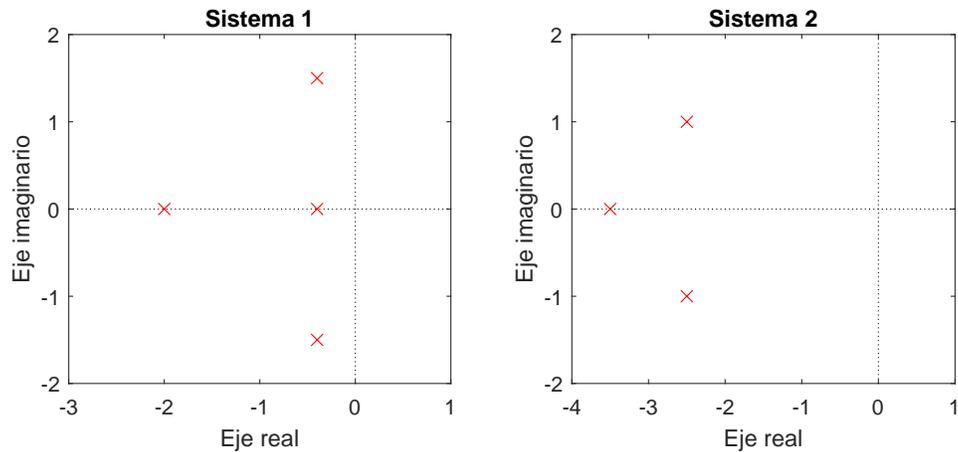


Figura 2.3: Configuración de frecuencias naturales de dos sistemas.

*Determine los modos naturales de cada sistema, y las frecuencias dominantes en cada caso. ¿Cuál de los dos sistemas es más rápido?*

**Desarrollo.**

- Para Sistema 1: Los polos del sistema se encuentran aproximadamente en  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = (-2, -2/5, -2/5 + 3j/2, -2/5 - 3j/2)$ . Por lo tanto, los modos naturales asociados son

$$u_{\lambda_1} = e^{-2t}, \quad u_{\lambda_2} = e^{-\frac{2t}{5}}, \quad u_{\lambda_{3,4}} = e^{-\frac{2t}{5}} \sin\left(\frac{3}{2}t\right), \quad u_{\lambda_{3,4}} = e^{-\frac{2t}{5}} \cos\left(\frac{3}{2}t\right).$$

Observando la figura, notamos que los polos más cercanos al eje imaginario son  $-2/5 \pm 3j/2$  y  $-2/5$ . Por ende, las frecuencias dominantes corresponden a  $\lambda = -2/5 \pm 3j/2$  y  $\lambda = -2/5$ .

- Para Sistema 2: Los polos del sistema se encuentran en  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (-7/2, -5/2 + j, -5/2 - j)$ . Por lo tanto, los modos naturales asociados son

$$u_{\lambda_1} = e^{-\frac{7}{2}t}, \quad u_{\lambda_2} = e^{-\frac{5}{2}t} \sin(t), \quad u_{\lambda_3} = e^{-\frac{5}{2}t} \cos(t).$$

Observando la figura, observamos que los polos más cercanos al eje imaginario son  $-5/2 \pm j$ . Por lo tanto, las frecuencias dominantes corresponden a  $\lambda = -5/2 \pm j$ .

Finalmente, al comparar ambos polos dominantes se concluye que el sistema 2 es más rápido, pues su modo natural más lento converge más rápido que el modo más lento del sistema 1.  $\square$

## 2.3. Respuesta a escalón unitario

La respuesta a escalón de un sistema lineal entrega información para caracterizar el comportamiento de éste frente a una entrada arbitraria. Veremos en los próximos ejercicios que se puede obtener la EDS a partir de la respuesta a escalón, y estudiaremos cómo se obtiene la respuesta a escalón a partir de la EDS.

**Ejercicio 2.3.1** (☛) La EDS de un sistema LTI está dada por

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = u(t).$$

Determine la respuesta a escalón unitario, si las condiciones iniciales del sistema son cero.

**Desarrollo.** El modo forzante es simplemente una constante. Reemplazando en la EDS, obtenemos

$$y_p(t) = \frac{1}{2}. \quad (2.3)$$

Por otra parte, los modos naturales están dados por la ecuación característica del sistema

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0,$$

con la cual se concluye que  $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ . Esto indica que la respuesta a escalón del sistema es de la forma

$$y(t) = \frac{1}{2} + c_1e^{-t} + c_2e^{-2t}.$$

Las constantes se pueden determinar a partir de las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} y(0) = 0 &\implies c_1 + c_2 = -\frac{1}{2}, \\ \frac{dy(0)}{dt} = 0 &\implies c_1 + 2c_2 = 0. \end{aligned}$$

Estas dos ecuaciones llevan a  $c_1 = -1, c_2 = 1/2$ , con lo cual se concluye que<sup>2</sup>

$$y(t) = \left(\frac{1}{2} - e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\right)\mu(t). \quad \square$$

**Ejercicio 2.3.2** (☛) La respuesta de un sistema lineal e invariante en el tiempo a un escalón unitario (con condiciones iniciales iguales a cero) está dada por

$$g(t) = 1 - e^{-t} - te^{-t} \quad \forall t \geq 0. \quad (2.4)$$

Determine la EDS, y calcule la respuesta del mismo sistema a un impulso unitario.

**Desarrollo.** Dado que se tienen condiciones iniciales iguales a cero, la respuesta del sistema estará dada por el modo forzado asociado a  $u = \mu(t)$ , y los modos naturales que se encargan de forzar condiciones iniciales cero.

La componente de  $g(t)$  asociada al modo constante es 1. Por ende, en la EDS debe cumplirse  $a_0 = b_0$ . Luego, observando los modos naturales asociados a la respuesta a estímulo, y suponiendo que no existen cancelaciones polo-cero, se tiene un polo en -1 con multiplicidad 2. Por ende, la ecuación característica es de la forma

$$(\lambda + 1)^2 = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

<sup>2</sup>Se asume que  $y(t) = 0$  para  $t < 0$ . En rigor, las condiciones iniciales se imponen sobre  $y(0_-)$  e  $dy(0_-)/dt$ , las cuales para este problema son iguales a  $y(0_+)$  e  $dy(0_+)/dt$ , respectivamente.

Con esta información, y sabiendo que  $a_0 = b_0$ , se concluye que la EDS de segundo grado es

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t).$$

Puede comprobarse que la respuesta a estímulo satisface  $g(0) = g'(0) = 0$ . Además, si se resuelve la EDS obtenida con  $u(t) = \mu(t)$  y condiciones iniciales iguales a cero se obtiene (2.4), concluyéndose que el resultado es correcto.

Finalmente, dado que el sistema es LTI, la respuesta a impulso unitario se determina derivando la respuesta a escalón:

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} = te^{-t}.$$

**Nota:** Con las técnicas de transformada de Laplace posteriormente estudiadas en este curso se puede resolver este ejercicio de forma más sencilla y directa.  $\square$

**Ejercicio 2.3.3** (☹☹☹) *La respuesta de un sistema lineal e invariante en el tiempo a un escalón unitario (con condiciones iniciales iguales a cero) está dada por*

$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-4t} - e^{-t} \quad \forall t \geq 0. \quad (2.5)$$

*Determine la EDS, y calcule la respuesta del mismo sistema a un impulso unitario.*

**Desarrollo.** Este problema se resolverá de 2 formas distintas.

- **Primer método:** La forma estándar de resolver este ejercicio es acudiendo a los conceptos de modos naturales, linealidad e invarianza en el tiempo. Notando que  $1/2$  corresponde a la respuesta forzada, los modos naturales deben ser  $e^{-t}$  y  $e^{-4t}$ . Los polos asociados a estos modos satisfacen la ecuación característica

$$(\lambda + 1)(\lambda + 4) = \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0.$$

Con esta información, se tiene la EDS con condiciones iniciales cero

$$\frac{d^2g_0(t)}{dt^2} + 5\frac{dg_0(t)}{dt} + 4g_0(t) = u(t). \quad (2.6)$$

Conviene escribir la respuesta a escalón este sistema con condiciones iniciales cero como  $g_0(t) = \mathbf{T}\langle 0, \mu(t) \rangle$ . Podemos determinar  $g_0(t)$  de forma explícita, de forma similar al Ejercicio 2.3.1:

$$g_0(t) = \frac{1}{4} - \frac{e^{-t}}{3} + \frac{e^{-4t}}{12}.$$

En primer lugar interesa saber si existe un  $b_0$  tal que  $g(t) = \mathbf{T}\langle 0, b_0\mu(t) \rangle$ . Es fácil notar que esto no es posible, pues se llega a una contradicción en las ecuaciones formadas. Entonces, se propone  $g(t) = \mathbf{T}\langle 0, b_0\mu(t) + b_1\frac{d\mu(t)}{dt} \rangle$ . Por linealidad e invarianza en el tiempo, se puede

expresar esta relación como

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \mathbf{T} \left\langle 0, b_0 \mu(t) + b_1 \frac{d\mu(t)}{dt} \right\rangle \\
 &= b_0 \mathbf{T} \langle 0, \mu(t) \rangle + b_1 \mathbf{T} \left\langle 0, \frac{d\mu(t)}{dt} \right\rangle \\
 &= b_0 g_0(t) + b_1 \frac{dg_0(t)}{dt} \\
 &= \frac{b_0}{4} - \frac{b_0 e^{-t}}{3} + \frac{b_0 e^{-4t}}{12} + \frac{b_1 e^{-t}}{3} - \frac{b_1 e^{-4t}}{3}.
 \end{aligned}$$

Comparando con (2.5), se deduce que  $b_0 = 2$ ,  $b_1 = -1$ . Por lo tanto, la EDS corresponde a

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 4y(t) = 2u(t) - \frac{du(t)}{dt}.$$

En cuanto a la respuesta a impulso, ésta se determina de igual forma que el ejercicio anterior, obteniéndose

$$h(t) = \frac{dg(t)}{dt} = -2e^{-4t} + e^{-t}.$$

**Nota:** Este método es el más fácil de entender. Sin embargo, requiere algunos cálculos (como determinar la respuesta a escalón del sistema (2.6)) que el método 2 no necesita. Estudiaremos el segundo método a continuación.

- **Segundo método:** La respuesta del sistema estará dada por el modo forzado asociado a  $u = \mu(t)$ , y los modos naturales. Dado que la componente de  $g(t)$  asociada directamente al modo constante es  $1/2$ , en la EDS debe cumplirse que  $a_0 = 2b_0$ . Luego, observando los modos naturales asociados a la respuesta a estímulo, y suponiendo que no existen cancelaciones tipo polo-cero, se tiene  $\lambda_1 = -4$ ,  $\lambda_2 = -1$ . Estos polos satisfacen la ecuación característica

$$(\lambda + 1)(\lambda + 4) = \lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0.$$

Con esta información, y sabiendo que  $a_0 = 2b_0$ , se propone la EDS

$$\frac{d^2 g_1(t)}{dt^2} + 5 \frac{dg_1(t)}{dt} + 4g_1(t) = 2u(t).$$

Pero, si se desea encontrar la respuesta a escalón de este sistema, se obtiene que  $g_1(t) = 1/2 + e^{-4t}/6 - 2e^{-t}/3$ , la cual no coincide con (2.5). Además, de (2.5) puede comprobarse que  $g(0) = 0$ , pero  $g'(0) = -1 \neq 0$ . ¿Qué sucede?

El error está en la EDS. Dado que los modos naturales son correctos, el error únicamente puede ser en la parte de la EDS asociada al estímulo. Por esto, se propondrá estudiar la EDS

$$\frac{d^2 g(t)}{dt^2} + 5 \frac{dg(t)}{dt} + 4g(t) = 2u(t) + b_1 \frac{du(t)}{dt}, \quad (2.7)$$

donde  $b_1 \in \mathbb{R}$ .

El “truco” está en las condiciones iniciales: éstas se definen para justo antes del comienzo, es decir, en  $t = 0_-$ . Por otra parte, la respuesta obtenida es solamente válida desde

cero en adelante. Al calcular  $g(0)$  y  $g'(0)$  en realidad se está determinando los valores inmediatamente posteriores al cero, es decir, en  $t = 0_+$ . Por ende, sabiendo que existe una discontinuidad de la derivada de  $g(t)$  en  $t = 0$ , se procede a integrar la expresión (2.7), con  $u(t) = \mu(t)$ , a ambos lados desde  $\tau = 0_-$  hasta  $\tau = t$ :

$$\begin{aligned} \int_{0_-}^t \frac{d^2 g(\tau)}{d\tau^2} d\tau + 5 \int_{0_-}^t \frac{dg(\tau)}{d\tau} d\tau + 4 \int_{0_-}^t g(\tau) d\tau &= 2 \int_{0_-}^t \mu(\tau) d\tau + b_1 \int_{0_-}^t \frac{d\mu(\tau)}{d\tau} d\tau \\ \frac{dg(t)}{dt} - \frac{dg(0_-)}{dt} + 5g(t) - 5g(0_-) + 4 \int_{0_-}^t g(\tau) d\tau &= 2r(t) + b_1\mu(t) - b_1\mu(0_-) \\ \frac{dg(t)}{dt} + 5g(t) + 4 \int_{0_-}^t g(\tau) d\tau &= 2r(t) + b_1\mu(t). \end{aligned}$$

Evaluando en  $t = 0_+$ :

$$\frac{dg(0_+)}{dt} + 5g(0_+) + 4 \int_{0_-}^{0_+} g(\tau) d\tau = 2r(0_+) + b_1\mu(0_+). \quad (2.8)$$

Dado que  $g(t)$  no presenta delta de Dirac en cero, la integral de  $g(\tau)$  en (2.8) vale cero. Finalmente, reemplazando los valores de  $g(0_+)$  y  $g'(0_+)$  por 0 y  $-1$  respectivamente, se obtiene  $b_1 = -1$ . Así, la EDS obtenida es

$$\frac{d^2 g(t)}{dt^2} + 5 \frac{dg(t)}{dt} + 4g(t) = 2u(t) - \frac{du(t)}{dt},$$

la cual cumple con todo lo pedido. Para comprobar, el lector puede determinar la respuesta a escalón del sistema con EDS (2.9) con condiciones iniciales cero.

**Nota:** Para más detalles relacionados con el manejo de las condiciones iniciales y la Transformada de Laplace (contenido posterior), se recomienda estudiar [2].  $\square$

**Ejercicio 2.3.4** (☛☛) *La respuesta de un sistema lineal e invariante en el tiempo a un escalón unitario (con condiciones iniciales iguales a cero) está dada por*

$$g(t) = -1 + 2t + e^{-t} \quad \forall t \geq 0. \quad (2.9)$$

*Determine la EDS.*

**Desarrollo.** Al igual que los ejercicios anteriores, se deben obtener los modos naturales del sistema. Notemos que hay una componente rampa en la respuesta a escalón. Ésta debe producirse por un modo natural resonante  $\lambda = 0$ . Dado que el sistema tiene un valor propio asociado exactamente a la frecuencia del escalón, al tener como entrada un escalón se produce el fenómeno de resonancia en la salida.

Los autovalores son  $\lambda_1 = 0$  y  $\lambda_2 = -1$ . Éstos satisfacen la ecuación característica

$$\begin{aligned} \lambda(\lambda + 1) &= 0 \\ \lambda^2 + \lambda &= 0. \end{aligned}$$

Así, una opción para la EDS es

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = u(t).$$

Resolviendo esta ecuación diferencial para  $u(t) = \mu(t)$ :

$$g_0(t) = c_1 + t + c_2 e^{-t}.$$

Imponiendo las condiciones iniciales  $g_0(0) = dg_0(0)/dt = 0$ , se obtiene

$$g_0(t) = -1 + t + e^{-t}.$$

Ahora, observamos que no existe  $\alpha \in \mathbb{R}$  tal que  $\alpha g_0(t) = g(t)$ . Entonces, se debe ver si es posible encontrar valores de  $\alpha$  y  $\beta$  tal que  $\alpha g_0(t) + \beta \frac{dg_0(t)}{dt} = g(t)$ . Es decir,

$$-\alpha + \alpha t + \alpha e^{-t} + \beta - \beta e^{-t} = -1 + 2t + e^{-t}, \quad (2.10)$$

de donde se obtiene que  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 1$  satisfacen (2.10). Por lo tanto, la EDS es

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} = \frac{du(t)}{dt} + 2u(t). \quad \square$$

**Ejercicio 2.3.5 (☛☛, Problema 3.9. de [1])** La ecuación diferencial de un sistema está dada por:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 7 \frac{dy(t)}{dt} + 12y(t) = -\frac{du(t)}{dt} + 2u(t).$$

Calcule la ganancia del sistema para los siguientes modos:  $u_1(t) = e^{-2t}$ ,  $u_2(t) = 1$  y  $u_3(t) = \cos(3t)$ .

**Desarrollo.**

- Para  $u_1(t)$ : Suponiendo que la respuesta forzada frente a esta excitación es de la forma  $y_{u_1}(t) = Ae^{-2t}$ , reemplazando se tendrá

$$\begin{aligned} 4Ae^{-2t} - 14Ae^{-2t} + 12Ae^{-2t} &= 2e^{-2t} + 2e^{-2t} \\ \implies 4A - 14A + 12A &= 2 + 2 \\ \implies A &= 2, \end{aligned}$$

por lo tanto la ganancia para este modo es  $A = 2$ .

- Para  $u_2(t)$ : Suponiendo que la respuesta forzada frente a esta excitación es de la forma  $y_{u_2}(t) = B$ , reemplazando se tendrá

$$\begin{aligned} 12B &= 2 \\ \implies B &= \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

por lo tanto la ganancia para este modo es  $B = 1/6$ .

- Para  $u_3(t)$ : Sabiendo que  $\cos(3t) = (e^{3jt} + e^{-3jt})/2$ , por linealidad podemos escribir la respuesta frente a esta excitación como  $y_{u_3} = Ce^{3jt} + De^{-3jt}$ . Entonces, reemplazando en la EDS

$$-9Ce^{3jt} - 9De^{-3jt} + 7(3Cje^{3jt} - 3Dje^{-3jt}) + 12(Ce^{3jt} + De^{-3jt}) = \frac{-3je^{3jt}}{2} + \frac{3je^{-3jt}}{2} + e^{3jt} + e^{-3jt}.$$

Para que se cumpla esta igualdad para todo  $t \geq 0$ , se debe cumplir

$$\begin{aligned} -9Ce^{3jt} + 21Cje^{3jt} + 12Ce^{3jt} &= \frac{-3je^{3jt}}{2} + e^{3jt} \\ \implies C(3 + 21j) &= \frac{-3j}{2} + 1 \\ \implies C &= \frac{\frac{-3j}{2} + 1}{3 + 21j}. \end{aligned}$$

Además, juntando los términos con  $e^{-3jt}$ , también debe cumplirse

$$\begin{aligned} -9De^{-3jt} - 21Dje^{-3jt} + 12De^{-3jt} &= \frac{3je^{-3jt}}{2} + e^{-3jt} \\ \implies D(3 - 21j) &= \frac{3j}{2} + 1 \\ \implies D &= \frac{\frac{3j}{2} + 1}{3 - 21j}. \end{aligned}$$

Nótese que  $D = \bar{C}$ , donde  $\bar{*}$  es el complejo conjugado de  $*$ . Finalmente, es posible expresar la respuesta como

$$\begin{aligned} y_{u_3} &= \frac{2Ce^{3jt} + 2\bar{C}e^{-3jt}}{2} \\ &= |2C| \frac{e^{3jt+\angle C} + e^{-3jt-\angle C}}{2} \\ &= |2C| \cos(3t + \angle C) \\ &= \sqrt{\frac{13}{450}} \cos \left[ 3t + \arctan \left( -\frac{3}{2} \right) - \arctan \left( \frac{21}{3} \right) \right]. \end{aligned}$$

**Nota:** La interpretación del resultado es importante. La señal cosenoidal de entrada queda afectada en magnitud y en fase. El número complejo  $C$ , determinado con la entrada  $e^{3jt}$ , determina ambos parámetros. Extendiendo este argumento, resulta natural analizar la respuesta frente a  $u(t) = e^{j\omega t}$ , donde  $\omega \in \mathbb{R}$ . En ese caso, la ganancia compleja dependerá de la frecuencia  $\omega$ , y contiene toda la información de la respuesta del sistema frente a sinusoidales. Esta función compleja  $C(\omega)$  se conoce como *Respuesta en Frecuencia* (posteriormente denotada como  $H(j\omega)$ ), y será estudiada en el capítulo 3 de este apunte.  $\square$

## 2.4. Cálculo de la respuesta de la EDS vía Convolución

A continuación veremos una rápida e informal deducción de la operación que permite obtener la salida de un sistema lineal frente a una entrada arbitraria. Primero, notamos que se puede aproximar una función causal  $f(t)$  por<sup>3</sup>

$$f(t) \approx \sum_{i=0}^{\infty} f(i\Delta) \left[ \frac{\mu(t - i\Delta) - \mu(t - i\Delta - \Delta)}{\Delta} \right] \Delta,$$

<sup>3</sup>Note que esto corresponde a una aproximación ‘escalonada’ de la función  $f(t)$ . ¡Dibuje para convencerse!

donde  $\Delta$  es un número positivo pequeño. Sabiendo que  $\left[ \frac{\mu(t-i\Delta) - \mu(t-i\Delta-\Delta)}{\Delta} \right] \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} \delta(t - \tau)$ , se puede demostrar que

$$f(t) = \int_0^{\infty} f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau.$$

Si el sistema es LTI, la entrada  $f(i\Delta)\delta(t - i\Delta)\Delta$  producirá la salida  $f(i\Delta)h(t - i\Delta)\Delta$ , donde  $h(t)$  es la respuesta a impulso del sistema. Entonces, al hacer  $\Delta \rightarrow 0$ , la respuesta  $y(t)$  del sistema LTI para  $f(t)$  causal es

$$y(t) = \int_0^{\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau \triangleq f(t) * h(t). \quad (2.11)$$

En resumen, con la respuesta a impulso  $h(t)$  del sistema, es posible encontrar por convolución la salida del sistema LTI con condiciones iniciales cero, frente a una señal de entrada  $f(t)$  arbitraria.

**Ejercicio 2.4.1** (♣) Sean  $f(t)$  y  $g(t)$  dos funciones causales reales, y  $h(t) = f(t) * g(t)$ . Demuestre las siguientes propiedades:

- *Simetría:*  $f(t) * g(t) = g(t) * f(t)$ .
- *Invariancia:*  $f(t - t_0) * g(t) = h(t - t_0)$ , donde  $t_0 > 0$ .
- *Linealidad:* Sean  $f_1(t), f_2(t)$  son funciones causales reales, y  $a, b$  números reales. Si  $h_1(t) = f_1(t) * g(t)$  y  $h_2(t) = f_2(t) * g(t)$  entonces  $(af_1(t) + bf_2(t)) * g(t) = ah_1(t) + bh_2(t)$ .

**Desarrollo.** Todas las demostraciones se basan en la definición en (2.11).

- *Simetría:*

$$\begin{aligned} f(t) * g(t) &= \int_0^{\infty} f(\tau)g(t - \tau)d\tau \\ &= \int_0^t f(\tau)g(t - \tau)d\tau \\ &\stackrel{(t-\tau=s)}{=} \int_{t-s}^0 g(s)f(t - s)ds \\ &= g(t) * f(t). \end{aligned}$$

- *Invariancia:*

$$\begin{aligned} f(t - t_0) * g(t) &= \int_0^{\infty} f(\tau - t_0)g(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{t_0}^{\infty} f(\tau - t_0)g(t - \tau)d\tau \\ &\stackrel{(\tau-t_0=s)}{=} \int_0^{\infty} f(s)g(t - t_0 - s)ds \\ &= h(t - t_0). \end{aligned}$$

- Linealidad:

$$\begin{aligned}
 (af_1(t) + bf_2(t)) * g(t) &= \int_0^\infty (af_1(\tau) + bf_2(\tau))g(t - \tau)d\tau \\
 &= a \int_0^\infty f_1(\tau)g(t - \tau)d\tau + b \int_0^\infty f_2(\tau)g(t - \tau)d\tau \\
 &= ah_1(t) + bh_2(t). \quad \square
 \end{aligned}$$

**Ejercicio 2.4.2** (☞) *La respuesta de un sistema lineal e invariante en el tiempo a un impulso unitario y condiciones iniciales cero es  $h(t) = e^{-2t}\mu(t)$ . Usando convolución calcule la respuesta del sistema a una entrada  $u(t) = e^{-3t}\mu(t)$  y condiciones iniciales cero.*

**Desarrollo.** Desarrollando la convolución definida en (2.11), se tiene

$$\begin{aligned}
 y(t) &= h(t) * u(t) \\
 &= \int_0^\infty h(\tau)u(t - \tau)d\tau \\
 &= \int_0^\infty e^{-2\tau}e^{-3(t-\tau)}\mu(t - \tau)d\tau \\
 &= e^{-3t} \int_0^t e^\tau d\tau \\
 &= (e^{-2t} - e^{-3t})\mu(t).
 \end{aligned}$$

**Nota:** El resultado anterior también se puede deducir con herramientas de la transformada de Laplace, contenido estudiado en el Capítulo 4.  $\square$

**Ejercicio 2.4.3** (☞☞☞) *La respuesta de un sistema lineal e invariante en el tiempo a un impulso unitario y condiciones iniciales cero es  $h(t) = e^{-t}\mu(t)$ . Usando convolución calcule la respuesta  $y(t)$  del sistema a una entrada tipo onda cuadrada*

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 2k \leq t < 2k + 1, k \in \mathbb{N}_0, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (2.12)$$

*y condiciones iniciales cero. Posteriormente, determine  $y(2)$  e  $y(3)$ , y determine el límite de la secuencia  $y(0), y(2), y(4), \dots$ . ¿Es el mismo límite que para la secuencia de instantes impares de tiempo?*

**Desarrollo.** Primero, se escribe  $u(t)$  de forma conveniente como

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} [\mu(t - 2k) - \mu(t - 2k - 1)]. \quad (2.13)$$

Ahora, desarrollamos un cálculo auxiliar:

$$\begin{aligned}
 h(t) * \mu(t) &= \int_0^\infty h(\tau)\mu(t - \tau)d\tau \\
 &= \int_0^t e^{-\tau}d\tau \\
 &= (1 - e^{-t})\mu(t).
 \end{aligned}$$

Entonces, gracias a las propiedades de simetría, invariancia y linealidad demostradas en el ejercicio 2.4.1, desarrollamos la convolución

$$\begin{aligned}
y(t) &= h(t) * u(t) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} [h(t) * \mu(t - 2k) - h(t) * \mu(t - 2k - 1)] \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} [(1 - e^{-(t-2k)})\mu(t - 2k) - (1 - e^{-(t-2k-1)})\mu(t - 2k - 1)].
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Los siguientes valores se pueden calcular a partir de (2.14):

$$\begin{aligned}
y(2) &= (1 - e^{-2}) - (1 - e^{-1}) = e^{-1} - e^{-2} \\
y(3) &= (1 - e^{-3}) - (1 - e^{-2}) + (1 - e^{-1}) = 1 - e^{-1} + e^{-2} - e^{-3} \\
y(4) &= (1 - e^{-4}) - (1 - e^{-3}) + (1 - e^{-2}) - (1 - e^{-1}) = e^{-1} - e^{-2} + e^{-3} - e^{-4}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Ahora generalicemos. Para  $l \in \mathbb{N}$  fijo, se tiene que

$$\begin{aligned}
y(2l) &= \sum_{k=0}^{\infty} [(1 - e^{-2(l-k)})\mu(2l - 2k) - (1 - e^{-(2l-2k-1)})\mu(2l - 2k - 1)] \\
&= \sum_{k=0}^{l-1} [(1 - e^{-2(l-k)}) - (1 - e^{-(2l-2k-1)})] \\
&= e^{-2l}(e - 1) \sum_{k=0}^{l-1} e^{2k} \\
&= \frac{1 - e^{-2l}}{e + 1}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Note que este es el resultado esperado, pues con algo de álgebra se puede ver que

$$\frac{1 - e^{-2l}}{e + 1} = - \left[ \frac{(-e)^{-1} - (-e)^{-2l-1}}{1 - (-e)^{-1}} \right] = - \sum_{t=1}^{2l} (-e)^{-t}, \tag{2.17}$$

lo cual coincide con los cálculos hechos para  $y(2)$  e  $y(4)$ . De forma similar, para el caso impar se puede deducir que

$$\begin{aligned}
y(2l + 1) &= \sum_{k=0}^{\infty} [(1 - e^{-(2l-2k+1)})\mu(2l - 2k + 1) - (1 - e^{-2(l-k)})\mu(2l - 2k)] \\
&= e^{-1} \frac{1 - e^{-2l}}{e + 1} + 1 - e^{-1} \\
&= \frac{e - e^{-2l-1}}{e + 1} \\
&= \sum_{t=0}^{2k+1} (-e)^{-t},
\end{aligned} \tag{2.18}$$

lo cual nuevamente corresponde al resultado esperado. Finalmente, al tender las  $l$  a infinito en las expresiones (2.16) y (2.18), las secuencias pares e impares convergen a los siguientes valores:

$$\lim_{l \rightarrow \infty} y(2l) = \frac{1}{e+1}, \quad \lim_{l \rightarrow \infty} y(2l+1) = \frac{e}{e+1}. \quad \square$$

## 2.5. Ecuación Recursiva del Sistema (ERS)

La ERS es un modelo dinámico que describe una restricción fundamental sobre ciertas combinaciones de la entrada, salida, y algunas versiones retrasadas de ambas señales.

Las definiciones y propiedades de linealidad son equivalentes, mientras que para estabilidad, se adecua la definición de la siguiente forma:

**Estabilidad:** Para toda entrada acotada, se tiene salida acotada (estabilidad BIBO). Todos los modos naturales caen asintóticamente a cero. Esto se consigue si y sólo si el módulo o magnitud de cada frecuencia natural (es decir, autovalor o polo) es estrictamente menor que uno.

**Ejercicio 2.5.1** (☛☛) *Determine la respuesta del siguiente sistema frente a entrada escalón unitario y condiciones iniciales cero:*

$$g[k] + 2g[k-1] + 5g[k-2] = 5u[k] + 3u[k-1]. \quad (2.19)$$

**Desarrollo.** Para resolver, se aplica esencialmente la misma técnica estudiada para el caso continuo. En primer lugar, se calcula la respuesta de

$$g_0[k] + 2g_0[k-1] + 5g_0[k-2] = \mu[k]$$

con condiciones iniciales cero. Se sabe que  $g_0[k] = \mathbf{T}\langle 0, \mu[k] \rangle$  tiene la forma

$$g_0[k] = \left( K + C_1 \lambda_1^k + C_2 \lambda_2^k \right) \mu[k],$$

donde  $K = 1/(1+2+5) = 1/8$ ;  $\lambda_1 = -1+2j$ ;  $\lambda_2 = -1-2j$ .

Para determinar  $C_1$  y  $C_2$ , forzamos  $g_0[-1] = g_0[-2] = 0$ :

$$\begin{aligned} g_0[-1] &= \frac{1}{8} + C_1(-1+2j)^{-1} + C_2(-1-2j)^{-1} = 0 \\ g_0[-2] &= \frac{1}{8} + C_1(-1+2j)^{-2} + C_2(-1-2j)^{-2} = 0, \end{aligned}$$

de donde se obtiene  $(C_1, C_2) = ((7+j)/16, (7-j)/16)$ .

Ahora, se procede a obtener  $g_0[k-1]$ , el cual se obtiene utilizando la propiedad de invariancia en el tiempo:

$$g_0[k-1] = \left( \frac{1}{8} + C_1 \lambda_1^{k-1} + C_2 \lambda_2^{k-1} \right) \mu[k-1].$$

Finalmente se expresa la respuesta total, obtenida por linealidad como:

$$\begin{aligned} g[k] &= \mathbf{T}\langle 0, 5\mu[k] + 3\mu[k-1] \rangle \\ &= 5\mathbf{T}\langle 0, \mu[k] \rangle + 3\mathbf{T}\langle 0, \mu[k-1] \rangle \\ &= 5g_0[k] + 3g_0[k-1]. \end{aligned}$$

**Nota:** Puede demostrarse que  $g[k]$  es un número real para todo valor de  $k$ . Para ver esto, sea  $z = 1 - j/4 = |z|e^{j \arg z}$ . Notando que  $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ , se tiene

$$\begin{aligned} g_0[k] &= \frac{1}{8} + z\lambda_1^k + \overline{z}\overline{\lambda_1}^k \\ &= \frac{1}{8} + 2|z||\lambda_1|^k \left[ \frac{e^{j(\arg(\lambda_1)k + \arg z)} + e^{-j(\arg(\lambda_1)k + \arg z)}}{2} \right] \\ &= \frac{1}{8} + 2|z||\lambda_1|^k \cos(\arg(\lambda_1)k + \arg z). \end{aligned}$$

Es decir,  $g_0[k]$  corresponde a una sinusoidal amortiguada, tal como se esperaba por la naturaleza de los polos obtenidos.  $\square$

## 2.6. Cálculo de la respuesta de la ERS vía Convolución

De forma análoga al caso de tiempo continuo, la salida frente a una excitación causal arbitraria también se puede calcular usando la convolución, esta vez con la respuesta a un impulso de Kronecker:

$$y[k] = u[k] * h[k] \triangleq \sum_{t=0}^k u[t]h[k-t], \quad \forall k \in \mathbb{N}_0, \quad (2.20)$$

donde  $h[k]$  es la respuesta a impulso de Kronecker del sistema LTI.

**Ejercicio 2.6.1** (☹☹) *La respuesta de un sistema lineal e invariante en el tiempo a un delta de Kronecker es  $h[k] = (0,7)^k \mu[k]$ . Usando convolución calcule la respuesta del sistema a una entrada  $u[k] = (0,3)^k \mu[k]$ .*

**Desarrollo.** Ocupando la definición de convolución (2.20):

$$\begin{aligned} y[k] &= h[k] * u[k] \\ &= \sum_{l=0}^k (0,7)^l (0,3)^{(k-l)} \\ &= 0,3^k \sum_{l=0}^k \left(\frac{7}{3}\right)^l \\ &= 0,3^k \frac{\left(\frac{7}{3}\right)^{k+1} - 1}{\frac{7}{3} - 1} \\ &= \left[ \frac{7}{4}(0,7)^k - \frac{3}{4}(0,3)^k \right] \mu[k]. \end{aligned}$$

**Nota:** El resultado anterior también se puede deducir con herramientas de la transformada Zeta, contenido estudiado en el Capítulo 4 de este apunte.  $\square$

## Capítulo 3

# Fourier: Análisis bajo excitaciones periódicas

La idea fundamental en este capítulo es representar una función periódica como combinación lineal de sinusoides de ciertas frecuencias. A partir de esto se formulan las series de Fourier, concepto clave en muchas aplicaciones en electrónica, mecánica y física. Luego de explorar este tema, se estudia la transformada de Fourier de tiempo continuo y discreto, la cual permite describir sistemas lineales y sus respuestas, analizar señales, sintetizar filtros, entre muchas otras aplicaciones. Finalmente, se entrega una aplicación en procesamiento de señales y telecomunicaciones, y se introduce el concepto de diagrama de Bode.

### 3.1. Respuesta en Frecuencia

Siguiendo los pasos del ejercicio 2.3.5, si se sabe que  $H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\angle H(j\omega)} \in \mathbb{C}$  es la ganancia al modo forzante  $e^{j\omega t}$ , entonces por linealidad la respuesta de un sistema lineal frente a una entrada sinusoidal es<sup>1</sup>

$$\mathbf{T}\langle \mathbf{x}_0, A \cos(\omega t + \phi) \rangle = |H(j\omega)|A \cos(\omega t + \phi + \angle H(j\omega)) + \{\text{modos naturales}\}.$$

Si consideramos un sistema estable, se tiene como respuesta estacionaria

$$\mathbf{T}\langle \mathbf{x}_0, A \cos(\omega t + \phi) \rangle = |H(j\omega)|A \cos(\omega t + \phi + \angle H(j\omega)). \quad (3.1)$$

La función de variable compleja  $H(j\omega)$  se conoce como *Respuesta en Frecuencia*.

**Ejercicio 3.1.1** (☛☛) *Sea la siguiente EDS*

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 5\frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = 6u(t).$$

*Encuentre la respuesta particular  $y_p(t)$  cuando  $u(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ .*

**Desarrollo.** La entrada  $u(t)$  se puede escribir como

$$u(t) = \frac{Ae^{j\phi}}{2j}e^{j\omega t} - \frac{Ae^{-j\phi}}{2j}e^{-j\omega t}.$$

---

<sup>1</sup>Se invita al lector a hacer los cálculos!

Dado que el sistema es lineal, basta conocer la respuesta al sistema frente a los modos forzantes  $e^{j\omega t}$  y  $e^{-j\omega t}$ . Si se expresa la respuesta particular como  $y_p(t) = K_1 e^{j\omega t} + K_2 e^{-j\omega t}$ , se obtiene que las ganancias corresponden a

$$K_1 = \frac{6}{(j\omega)^2 + 5(j\omega) + 6}, \quad K_2 = \frac{6}{(-j\omega)^2 + 5(-j\omega) + 6}.$$

No es coincidencia que  $K_2 = \overline{K_1}$ . Luego, expresando  $K_1$  en su forma polar como  $K_1 = |K_1| e^{j\angle K_1}$ , se tiene la respuesta particular

$$\begin{aligned} y_p(t) &= K_1 \frac{Ae^{j\phi}}{2j} e^{j\omega t} - \overline{K_1} \frac{Ae^{-j\phi}}{2j} e^{-j\omega t} \\ &= A|K_1| \frac{e^{j(\omega t + \phi + \angle K_1)} - e^{-j(\omega t + \phi + \angle K_1)}}{2j} \\ &= A|K_1| \sin(\omega t + \phi + \angle K_1) \\ &= A \frac{6}{\sqrt{\omega^2 + 9}\sqrt{\omega^2 + 4}} \sin \left[ \omega t + \phi - \arctan \left( \frac{\omega}{3} \right) - \arctan \left( \frac{\omega}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

**Nota:** Tal como lo indica la parte conceptual de este apunte, lo fundamental para el cálculo de la respuesta particular de una entrada sinusoidal es la respuesta al sistema frente a una excitación exponencial compleja  $e^{j\omega t}$ . La estructura de la ganancia asociada a este modo forzante corresponde directamente con los coeficientes de la EDS. Por lo tanto, es natural pensar que considerando respuestas a diferentes excitaciones sinusoidales, sea posible reconstruir la EDS a partir de la estimación de la función  $K_1(j\omega)$ . El área que se dedica a estudiar el problema de estimar la respuesta en frecuencia, entre otros problemas, se denomina *Identificación de Sistemas* [3].  $\square$

**Ejercicio 3.1.2** (👉) Sea el circuito RC de la Figura 3.1.

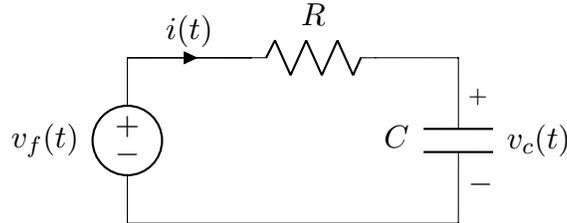


Figura 3.1: Circuito RC en serie.

Si  $v_f(t) = \cos(\omega t)$ , calcule la respuesta  $v_c(t)$  en estado estacionario por fasores, y luego ocupando el concepto de respuesta en frecuencia.

**Desarrollo.**

- Desarrollo por fasores: Consideremos la representación del circuito por fasores a la frecuencia  $\omega$ . Así, la impedancia del condensador es  $1/(j\omega C)$  y el voltaje de la fuente es la unidad. Entonces,

$$V_c = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + R} = \frac{1}{1 + j\omega RC}.$$

Volviendo al dominio del tiempo, se tiene

$$v_c(t) = \sqrt{\frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \cos[\omega t - \arctan(\omega RC)]. \quad (3.2)$$

- Desarrollo por respuesta en frecuencia: La ecuación diferencial del sistema es

$$RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = v_f(t).$$

Así, la respuesta en frecuencia del sistema es

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}.$$

Por lo tanto, la salida  $v_c(t)$  en estado estacionario producto de la entrada  $v_f(t) = \cos(\omega t)$  está dada por

$$\begin{aligned} v_c(t) &= |H(j\omega)| \cos(\omega t + \angle H(j\omega)) \\ &= \sqrt{\frac{1}{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \cos[\omega t - \arctan(\omega RC)]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Por supuesto, ambos resultados en (3.2) y (3.3) son válidos y equivalentes. Con este ejercicio se concluye que la transformada fasorial puede verse como un caso particular del análisis con respuesta en frecuencia, la cual obviamente sirve no solamente para circuitos eléctricos, sino que para cualquier sistema lineal e invariante en el tiempo. Se rescata la generalidad del resultado, y la relación antes no evidente entre estas dos herramientas. En resumen, *fasores es una manera particular de trabajar el concepto de respuesta en frecuencia en redes eléctricas.*  $\square$

**Ejercicio 3.1.3** (👉👉) Sea la respuesta en frecuencia de un sistema de la forma

$$G(j\omega) = \frac{b}{j\omega + a},$$

donde  $a > 0$  y  $b > 0$  son parámetros desconocidos. Este sistema ha sido excitado con una señal de entrada  $u(t) = 2 \sin(0,5t)$ , y se ha medido la salida  $y(t)$  con un sensor ruidoso, como lo visto en la Figura 3.2.

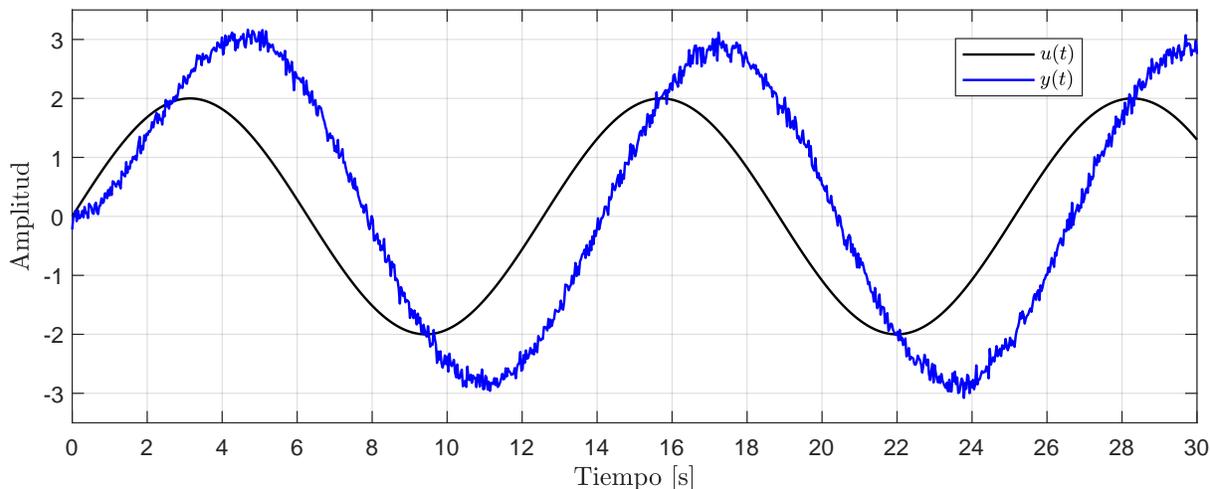


Figura 3.2: Señales de entrada y salida ruidosa de un sistema LTI.

Con la información del gráfico, estime los valores de  $a$  y  $b$ .

**Desarrollo.** Sin considerar efectos de ruido, la respuesta del sistema en estado estacionario en función de los valores  $a$  y  $b$  está dada por

$$y(t) = \frac{2b}{\sqrt{0,5^2 + a^2}} \sin \left[ 0,5t - \arctan \left( \frac{0,5}{a} \right) \right].$$

Observando la figura 3.2, vemos que el valor máximo de la señal de salida es aproximadamente 3, lo cual implica que<sup>2</sup>

$$\frac{2b}{\sqrt{0,5^2 + a^2}} \approx 2,8. \quad (3.4)$$

Ahora necesitamos estimar la fase. Para esto, notamos que  $y(22) \approx -2$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{-2}{2,8} &\approx \sin \left[ 11 - \arctan \left( \frac{1}{2a} \right) \right] = -\sin \left[ 11 - 3\pi - \arctan \left( \frac{1}{2a} \right) \right] \\ \Rightarrow \frac{1}{2a} &\approx \tan \left[ 11 - 3\pi - \arcsin \left( \frac{2}{2,8} \right) \right] \\ \Rightarrow a &\approx 0,49. \end{aligned}$$

Con esta estimación de  $a$ , usamos (3.4) para obtener  $b \approx 0,98$ .

**Nota:** En este ejercicio hemos identificado un sistema a partir de datos de entrada y salida. Lo estudiado acá es una forma sencilla de hacer identificación. Con esta misma información, hay métodos basados únicamente en el dominio de la frecuencia, como también métodos basados en algoritmos de optimización, que permiten obtener mejores resultados. De todas formas, nuestra estimación es bastante buena (Los valores reales son  $a = 0,5$  y  $b = 1$ ).  $\square$

<sup>2</sup>La deducción hecha supone que la señal en el gráfico ya se encuentra en estado estacionario. Esto no es cierto, pero la aproximación hecha es suficientemente buena para tener una estimación razonable.

### 3.2. Series de Fourier para señales de tiempo continuo

Sea  $f(t)$  una función real, definida (al menos) en el intervalo  $[-T/2, T/2]$ , continua por tramos. Entonces  $f(t)$  se puede representar como una serie de Fourier trigonométrica

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega_0 t) + B_n \sin(n\omega_0 t)], \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (3.5)$$

donde<sup>3</sup>

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad (3.6)$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt. \quad (3.7)$$

De forma equivalente,  $f(t)$  puede escribirse como una serie de Fourier exponencial

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad (3.8)$$

donde

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt. \quad (3.9)$$

De estas expresiones, puede verse que para todo  $n > 0$ , se tiene

$$C_n = \frac{A_n - jB_n}{2} \quad y \quad C_{-n} = \frac{A_n + jB_n}{2}.$$

Los coeficientes  $C_n$  juegan un rol importante en la descripción de una señal en el dominio de la frecuencia. La magnitud de  $C_n$  guarda relación con qué tanta energía tiene la señal en la frecuencia  $n\omega_0$ . Como ejemplo, la cantidad  $C_0$  corresponde al valor medio de la señal. Si  $C_0 = 0$ , la señal no tiene componente constante (o bien, esta componente es igual a cero).

Un gráfico de la magnitud de los valores  $\sqrt{A_n^2 + B_n^2}$  se denomina *espectro de líneas*. Este gráfico sirve para conocer la distribución de energía de la señal en cada frecuencia.

**Ejercicio 3.2.1** (☛) *Considere los coeficientes de Fourier  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$  descritos en (3.6), (3.7) y (3.9) respectivamente. Demuestre que  $2|C_n| = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$  para  $n > 0$ .*

**Desarrollo.** Note que

$$C_n + C_{-n} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \left( \frac{e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}}{2} \right) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(\omega_0 n t) dt = A_n,$$

$$-C_n + C_{-n} = \frac{2j}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \left( \frac{e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}}{2j} \right) dt = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(\omega_0 n t) dt = jB_n.$$

<sup>3</sup>En caso que  $f(t)$  esté definida en otro intervalo  $[t_0, t_0 + T]$  con  $t_0 \in \mathbb{R}$ , el dominio de integración es justamente  $[t_0, t_0 + T]$ . Si la función  $f(t)$  es periódica de periodo  $T$ , el lector puede demostrar que no importa el valor de  $t_0$  para el cálculo de las integrales de  $A_0$ ,  $A_n$  y  $B_n$ .

Además, sabemos que  $C_{-n}$  es el complejo conjugado de  $C_n$ . Entonces, calculamos

$$A_n^2 + B_n^2 = (C_n + C_{-n})^2 + j^2(C_n - C_{-n})^2 = 4C_n C_{-n} = 4|C_n|^2. \quad (3.10)$$

Sacando raíz se obtiene lo pedido.  $\square$

**Ejercicio 3.2.2** (☞☞) Calcule la serie de Fourier exponencial de la función periódica de periodo 2

$$f(t) = e^{-|t|}, \quad -1 < t \leq 1.$$

**Desarrollo.** Calculamos  $C_n$  como

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-|t|} e^{-jn\pi t} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{-|t|} [\cos(n\pi t) - j \sin(n\pi t)] dt \\ &= \int_0^1 e^{-t} \cos(n\pi t) dt. \end{aligned}$$

Esta integral se resuelve integrando por partes dos veces:

$$C_n = \frac{1}{n\pi} \int_0^1 e^{-t} \sin(n\pi t) dt = \frac{1}{(n\pi)^2} [(-1)^{n+1} e^{-1} + 1 - C_n] \implies C_n = \frac{(-1)^{n+1} e^{-1} + 1}{(n\pi)^2 + 1}.$$

Por lo tanto,  $f(t)$  se puede representar por la serie de Fourier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{n+1} e^{-1} + 1}{(n\pi)^2 + 1} \right] e^{jn\pi t}. \quad \square$$

**Ejercicio 3.2.3** (☞☞) Determine la serie de Fourier trigonométrica y exponencial, y el espectro de líneas de la siguiente señal periódica:

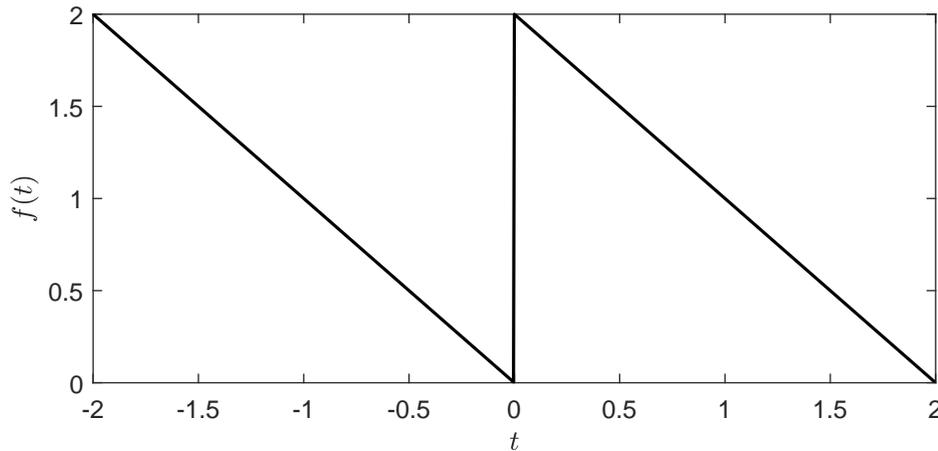


Figura 3.3: Señal periódica  $f(t)$ .

**Desarrollo.** El periodo de  $f(t)$  es  $T = 2$ . Por ende, esta señal se puede expresar como

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\pi t) + B_n \sin(n\pi t)],$$

con

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2} \int_0^2 (2-t) dt = 2 - \frac{1}{2} \frac{t^2}{2} \Big|_0^2 = 1, \\ A_n &= \int_0^2 (2-t) \cos(n\pi t) dt = \left[ \frac{(2-t) \sin(n\pi t)}{n\pi} \right] \Big|_0^2 + \frac{1}{n\pi} \int_0^2 \sin(n\pi t) dt = 0, \\ B_n &= \int_0^2 t \sin(n\pi t) dt = \left[ \frac{-(2-t) \cos(n\pi t)}{n\pi} \right] \Big|_0^2 - \frac{1}{n\pi} \int_0^2 \cos(n\pi t) dt = \frac{2}{n\pi}. \end{aligned}$$

Así, se tiene<sup>4</sup>

$$f(t) = 1 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi t)}{n}. \quad (3.11)$$

Para obtener la serie de Fourier exponencial, se reemplaza<sup>5</sup>  $\sin(n\pi t) = (e^{jn\pi t} - e^{-jn\pi t})/(2j)$  en (3.11):

$$f(t) = 1 + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi t)}{n} = 1 + \frac{1}{\pi j} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{jn\pi t} - e^{-jn\pi t}}{n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\pi t},$$

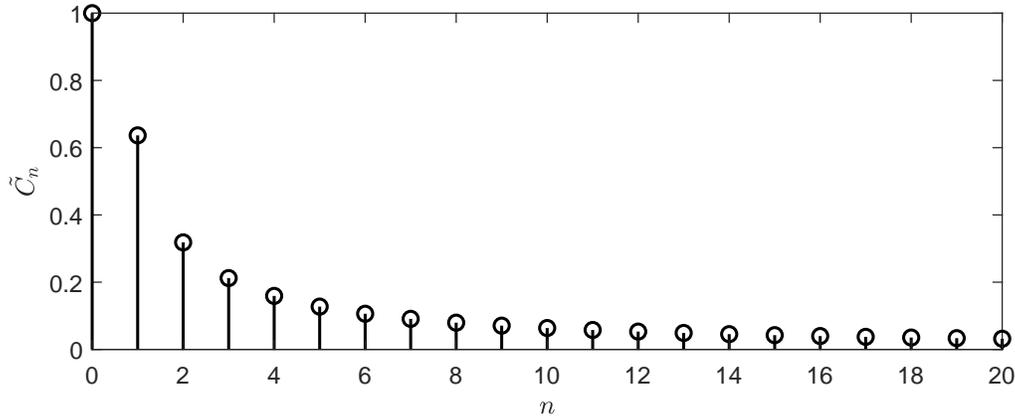
donde

$$C_n = \begin{cases} -\frac{1}{n\pi j} & \text{si } n < 0, \\ 1 & \text{si } n = 0, \\ \frac{1}{n\pi j} & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

Finalmente, se grafica  $\tilde{C}_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ |B_n| & \text{si } n > 0 \end{cases}$  en la Figura 3.4.  $\square$

<sup>4</sup> A partir de este resultado, se deja al lector demostrar que  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$ .

<sup>5</sup> También puede obtenerse el resultado a través de las integrales escritas en la página anterior, sin embargo, si ya se ha calculado la serie trigonométrica, es más fácil hacer este reemplazo.

Figura 3.4: Espectro de líneas de  $f(t)$ .

### 3.3. Teorema de Parseval para series de Fourier

El teorema de Parseval relaciona la potencia promedio de una señal en el tiempo con su equivalente en el dominio de la frecuencia:

$$\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt = A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{\infty} (A_l^2 + B_l^2) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_l^2. \quad (3.12)$$

**Nota:** La noción de ‘potencia promedio’ viene de redes eléctricas: si  $f(t)$  corresponde a una señal de voltaje, entonces  $|f(t)|^2$  es la potencia instantánea disipada por una resistencia de  $1[\Omega]$ . Por ende, la integral en (3.12) representa el promedio temporal de esta potencia instantánea.

**Ejercicio 3.3.1** (♣) Compruebe el Teorema de Parseval para

$$u(t) = 2 + \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right), \quad t \in [0, 4].$$

**Desarrollo.** Primero calculamos la energía en el dominio del tiempo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int_0^4 |u(t)|^2 dt &= \frac{1}{4} \int_0^4 \left[ 4 + 4 \cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{2}t\right) \right] dt \\ &= 4 + \int_0^4 \frac{1 + 2 \cos(\pi t)}{8} dt \\ &= \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

En el dominio de la frecuencia, los cálculos son más sencillos, dado que se observa de inmediato que  $A_0 = 2$ ,  $A_1 = 1$ , mientras que todos los demás coeficientes son iguales a cero. Además, dado que  $\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right) = (e^{j\frac{\pi}{2}t} + e^{-j\frac{\pi}{2}t})/2$ , tenemos que  $C_0 = 2$ ,  $C_{-1} = C_1 = 1/2$ , con lo cual concluimos que

$$A_0^2 + \frac{A_1^2}{2} = C_0^2 + C_{-1}^2 + C_1^2 = \frac{9}{2} = \frac{1}{4} \int_0^4 |u(t)|^2 dt. \quad \square$$

**Ejercicio 3.3.2** (☛☛☛) *Obtenga la serie de Fourier de la señal onda cuadrada*

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } 2k \leq t < 2k + 1, k \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Luego, determine cuántas armónicas de su serie de Fourier se necesitan como mínimo para capturar el 97% de la potencia promedio de la señal.

**Desarrollo:** Primero, notamos que conviene escribir  $f(t)$  como  $f(t) = 1 + g(t)$ , donde

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 2k \leq t < 2k + 1, k \in \mathbb{Z}, \\ -1 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Así, basta obtener los coeficientes de la serie de Fourier de  $f(t)$ . Como es una señal impar, solo necesitamos conocer  $B_n$ :

$$B_n = 2 \int_0^1 \sin(n\pi t) dt = \frac{-2 \cos(n\pi t)}{n\pi} \Big|_0^1 = \frac{2[1 - (-1)^n]}{n\pi}.$$

Por ende, la serie de Fourier de  $f(t)$  es

$$f(t) = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin[(2n-1)\pi t]}{2n-1}.$$

Por otra parte, la potencia promedio  $P$  de  $f(t)$  está dada por

$$P = \frac{1}{2} \int_0^1 4 dt = 2.$$

Gracias al teorema de Parseval, estamos interesados en el valor  $n^* \in \mathbb{N}$  más pequeño que satisfaga

$$1 + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{n^*} \left[ \frac{16}{\pi^2 (2n-1)^2} \right] \geq \frac{97}{100} P \iff \sum_{l=1}^{n^*} \frac{1}{(2n-1)^2} \geq \frac{48\pi^2}{400} = 1,1596 \dots$$

Probando valores, obtenemos que  $n^* = 4$ . Es decir, con 4 armónicas se alcanza el 97% de la potencia promedio de  $f(t)$ . En la Figura 3.5 se observa la aproximación obtenida  $\tilde{f}(t) = 1 + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^4 \frac{\sin[(2n-1)\pi t]}{2n-1}$ , junto con la señal  $f(t)$ .

**Nota:** En este ejercicio se ha visto que la serie de Fourier permite identificar la energía asociada a cada frecuencia, y con esto obtener aproximaciones “óptimas” de señales periódicas a partir de sinusoidales con frecuencia y amplitud dada por la serie de Fourier de la señal.  $\square$

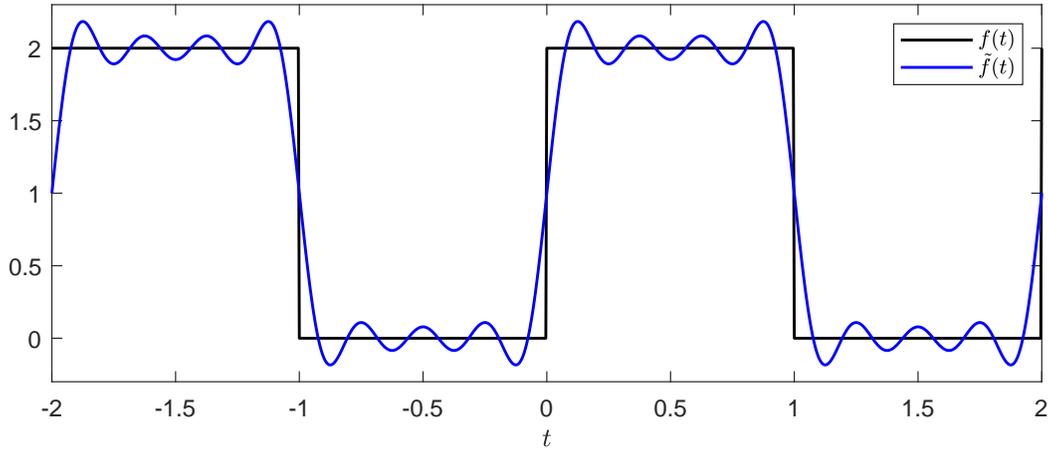


Figura 3.5: Señal  $f(t)$  en negro, junto a su aproximación de 4 armónicas en azul.

### 3.4. Transformada de Fourier

La Transformada de Fourier es una transformación que descompone una señal temporal en sus frecuencias constituyentes. A diferencia de la serie de Fourier, la transformada permite incorporar funciones no periódicas al análisis frecuencial. Su deducción proviene de las series de Fourier, al utilizarlas para representar funciones de período infinito o aperiódicas. La Transformada de Fourier y su inversa se definen como

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = f(t) \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega.$$

La transformada de Fourier satisface muchas propiedades. Las propiedades más utilizadas de esta transformada se detallan a continuación:

1. Linealidad: Si  $\mathcal{F}\{f_1(t)\} = F_1(j\omega)$  y  $\mathcal{F}\{f_2(t)\} = F_2(j\omega)$ , entonces para  $a, b$  reales,

$$\mathcal{F}\{af_1(t) + bf_2(t)\} = aF_1(j\omega) + bF_2(j\omega).$$

2. Retraso/adelanto temporal: Si  $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega)$  y  $t_0 \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0} F(j\omega).$$

3. Derivada: Si  $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega)$ , entonces

$$\mathcal{F}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = j\omega F(j\omega).$$

4. Convolución: Si  $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(j\omega)$  y  $\mathcal{F}\{g(t)\} = G(j\omega)$ , entonces

$$\mathcal{F}\{f(t) * g(t)\} = F(j\omega)G(j\omega).$$

**Ejercicio 3.4.1** (☛) *Determine la Transformada de Fourier de las siguientes señales:*

1.  $f_1(t) = e^{-at}\mu(t)$ ,  $a > 0$
2.  $f_2(t) = t[\mu(t+T) - \mu(t-T)]$
3.  $f_3(t) = \cos(\omega_0 t)$ .

**Desarrollo.**

1. Por definición,

$$\mathcal{F}\{f_1(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{(-j\omega-a)t} dt = -\frac{e^{(-j\omega-a)t}}{j\omega+a} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{j\omega+a}.$$

2. Nuevamente, por definición,

$$\mathcal{F}\{f_2(t)\} = \int_{-T}^T te^{-j\omega t} dt = -2j \int_0^T t \sin(\omega t) dt = \frac{2j}{\omega^2} [\omega T \cos(\omega T) - \sin(\omega T)].$$

3. La transformada de  $f_3(t)$  es conocida. Aquí derivaremos paso a paso la solución. Primero, notemos que

$$\mathcal{F}\{f_3(t)\} = \frac{1}{2} (\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} + \mathcal{F}\{e^{-j\omega_0 t}\}).$$

Ahora,

$$\mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_0-\omega)t} dt = 2\pi\delta(\omega - \omega_0),$$

donde la última igualdad es gracias a que<sup>6</sup>

$$\mathcal{F}^{-1}\{2\pi\delta(\omega - \omega_0)\} = \frac{2\pi}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = e^{j\omega_0 t}.$$

De igual forma, se obtiene  $\mathcal{F}\{e^{-j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega + \omega_0)$ . Por ende,

$$\mathcal{F}\{f_3(t)\} = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]. \quad \square$$

**Ejercicio 3.4.2** (☛☛) *Determine la serie de Fourier exponencial y la transformada de Fourier del tren de impulsos*

$$\delta_{\Delta}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta), \quad \text{con } \Delta \in \mathbb{R}^+ \text{ y } \delta(t) \text{ es el delta de Dirac.} \quad (3.13)$$

**Desarrollo.** Note que el período del tren de impulsos es  $\Delta$ . Entonces, la serie de Fourier exponencial de  $\delta_{\Delta}(t)$  es

$$\delta_{\Delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\frac{2\pi}{\Delta}t}, \quad (3.14)$$

---

<sup>6</sup>Note que, como en este ejercicio, a veces es útil trabajar al revés: obtener la transformada de Fourier de una señal es equivalente a encontrar una señal en el dominio de la frecuencia que, al aplicarle transformada inversa de Fourier, se obtenga la señal temporal.

donde

$$\begin{aligned}
 C_n &= \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - k\Delta) e^{-jn\frac{2\pi}{\Delta}t} dt \\
 &= \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \delta(t) e^{-jn\frac{2\pi}{\Delta}t} dt \\
 &= \frac{1}{\Delta}.
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Entonces,  $\delta_{\Delta}(t)$  se puede escribir como

$$\delta_{\Delta}(t) = \frac{1}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\frac{2\pi}{\Delta}t}. \tag{3.16}$$

Ahora, para la transformada de Fourier de la señal descrita, se aplica transformada de Fourier a la serie obtenida en (3.16). Aplicando las propiedades de linealidad y retraso en frecuencia de la transformada, se tiene

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{\delta_{\Delta}(t)\} &= \frac{1}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}\{e^{jn\frac{2\pi}{\Delta}t}\} \\
 &= \frac{2\pi}{\Delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{\Delta}\right).
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Con esto se obtiene el resultado sorprendente que la transformada de un tren de impulsos en el tiempo, es un tren de impulsos en el dominio de la frecuencia.

**Nota:** El resultado anterior tiene particular aplicación en el muestreo de señales. De hecho, corresponde a una de las herramientas matemáticas más importantes para establecer relaciones entre señales continuas y señales discretas a partir de discretización muestra a muestra. Para más información sobre este tema, puede consultar cualquier texto de *Procesamiento Digital de Señales*, como [4].  $\square$

### 3.5. Teorema de Parseval para Transformada de Fourier

El teorema de Parseval se traduce en este contexto a

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega. \tag{3.18}$$

**Ejercicio 3.5.1** (☛☛) *Determine la Transformada de Fourier de  $f(t) = \frac{1}{2c}[\mu(t+c) - \mu(t-c)]$ , y ocupe esta información para calcular*

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx.$$

**Desarrollo.** Resolviendo por definición,

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = \frac{1}{2c} \int_{-c}^c e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2c} \int_{-c}^c \cos(\omega t) dt = \frac{\sin(\omega t)}{2\omega c} \Big|_{-c}^c = \frac{\sin(\omega c)}{\omega c}. \tag{3.19}$$

La transformada de Fourier obtenida en (3.19) es de gran interés en Telecomunicaciones. Se define la función  $\text{sinc}(x)$  como

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

Así, podemos escribir  $\mathcal{F}\{f(t)\} = \text{sinc}(\omega c)$ . Ahora, por el teorema de Parseval se tiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2c} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(\omega c) d\omega = \frac{I}{2\pi c}.$$

Por lo tanto,  $I = \pi$ . □

### 3.6. Aplicación en sistemas lineales

La respuesta de un sistema a una señal de entrada arbitraria  $u(t)$  es

$$y(t) = h(t) * u(t).$$

Aplicando Fourier, gracias a la propiedad de convolución se tiene

$$Y(j\omega) = H(j\omega)U(j\omega),$$

donde  $H(j\omega)$  es una función racional de variable compleja de la forma  $H(j\omega) = B(j\omega)/A(j\omega)$ . Esta función es comúnmente definida como *Función de transferencia de Fourier*.

**Nota:** Si  $y(t)$  no decae a cero a medida que  $t \rightarrow \infty$ , la fórmula anterior no es válida, pues aparecen deltas de Dirac en  $H(j\omega)$ , y por ende  $H(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$  no queda correctamente descrita por  $B(j\omega)/A(j\omega)$ . Se consideran dos ejemplos de lo anterior en los siguientes ejercicios.

**Ejercicio 3.6.1** (👉👉) Usando la transformada de Fourier, determine la respuesta a escalón con condiciones iniciales cero del siguiente sistema

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = 6u(t).$$

**Desarrollo.** Sabiendo que el sistema no tiene polos en el eje imaginario, se obtiene  $H(j\omega)$  directamente:

$$H(j\omega) = \frac{6}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 6}.$$

Por otra parte, se sabe que la transformada de Fourier del escalón unitario es  $U(j\omega) = 1/(j\omega) + \pi\delta(\omega)$ . Así, se tiene que la respuesta a escalón es

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)U(j\omega)\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{6}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 6} \left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right)\right\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{6}{j\omega(j\omega + 2)(j\omega + 3)} + \pi\delta(\omega)\right\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right\} + \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{j\omega + 3}\right\} - \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{3}{j\omega + 2}\right\} \\ &= (1 + 2e^{-3t} - 3e^{-2t})\mu(t). \end{aligned} \quad \square$$

**Ejercicio 3.6.2** (☛☛☛) Sea la EDS

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 4\frac{dy(t)}{dt} = 2u(t).$$

Se sabe que la respuesta a impulso de este sistema es  $h(t) = 0,5(1 - e^{-4t})\mu(t)$  (¡obténalo a partir de lo aprendido en el capítulo anterior!). Usando la transformada de Fourier, determine la respuesta del sistema frente a  $u(t) = e^{-t}\mu(t)$  con condiciones iniciales cero, y luego obtenga una respuesta directamente a partir de  $\tilde{H}(j\omega) \triangleq B(j\omega)/A(j\omega)$ . Comente.

**Desarrollo.** Se sabe que la función de transferencia de Fourier es

$$H(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = \frac{1}{2j\omega} + \frac{\pi}{2}\delta(\omega) - \frac{1}{2(j\omega + 4)}.$$

Luego, ocupando las propiedades de la transformada de Fourier, se obtiene  $y(t)$  como

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)U(j\omega)\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\left(\frac{1}{2j\omega} + \frac{\pi}{2}\delta(\omega) - \frac{1}{2(j\omega + 4)}\right)\frac{1}{j\omega + 1}\right\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2j\omega(j\omega + 1)} + \frac{\pi}{2}\delta(\omega) - \frac{1}{2(j\omega + 4)(j\omega + 1)}\right\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2j\omega} - \frac{\frac{1}{2}}{j\omega + 1} + \frac{\pi}{2}\delta(\omega) + \frac{\frac{1}{6}}{j\omega + 4} - \frac{\frac{1}{6}}{j\omega + 1}\right\} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-4t}\right)\mu(t). \end{aligned}$$

Ahora, calculemos  $\tilde{y}(t) = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{H}(j\omega)U(j\omega))$ , donde  $\tilde{H}(j\omega) = \frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} = \frac{2}{(j\omega)(j\omega + 4)}$ :

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{H}(j\omega)U(j\omega)\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{2}{(j\omega)(j\omega + 1)(j\omega + 4)}\right\} \\ &= \mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{2j\omega} - \frac{\frac{2}{3}}{j\omega + 1} + \frac{\frac{1}{6}}{j\omega + 4}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{(j\omega)} + \pi\delta(\omega)\right\} - \frac{2}{3}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega + 1}\right\} + \frac{1}{6}\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega + 4}\right\} - \frac{1}{4}\mathcal{F}^{-1}\{2\pi\delta(\omega)\} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-4t}\right)\mu(t) - \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Claramente  $y(t) \neq \tilde{y}(t)$ .

En este caso vemos que obtener directamente  $H(j\omega)$  a partir de la EDS no produce resultados correctos, dado que ésta tiene un autovalor en el eje imaginario (en este caso,  $\lambda = 0$ ). Como caso general, siempre se obtendrá la salida correcta al considerar la función de transferencia de Fourier como la transformada de Fourier de la respuesta a impulso del sistema.  $\square$

**Nota:** Resolviendo esta convolución en el dominio del tiempo posiblemente se obtiene  $y(t)$  de forma más rápida. Este ejemplo también muestra que puede ser más difícil resolver con Fourier estos tipos de problemas en particular, pero aún es posible aplicar la técnica y puede entregar interpretaciones alternativas que son de utilidad, como se verá en la sección siguiente.

### 3.7. Filtraje

La respuesta en frecuencia  $H(j\omega)$  captura la forma en que evolucionan las ganancias de magnitud y fase de la salida del sistema con la frecuencia  $\omega$ . Dado el contenido frecuencial de la señal de entrada a un sistema, el sistema tiene la capacidad de filtrar y discriminar diferentes contenidos espectrales.

**Ejercicio 3.7.1** (☛☛☛) *Grafique y analice cómo cambia la magnitud de la respuesta en frecuencia*

$$H(j\omega) = \frac{\alpha}{(j\omega + 1)(j\omega + \alpha)}$$

para distintos valores de  $\alpha > 0$ . ¿Cómo es la respuesta a escalón para cada valor de  $\alpha$  analizado?

**Desarrollo.** Se calcula la magnitud de  $H(j\omega)$ :

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + 1}\sqrt{\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2 + 1}}$$

Para tener un bosquejo de  $|H(j\omega)|$ , aproximamos  $\sqrt{\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2 + 1}$  como

$$\sqrt{\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2 + 1} \approx \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \ll \alpha, \\ \frac{\omega}{\alpha} & \text{si } \omega \gg \alpha. \end{cases}$$

Entonces, se obtiene la aproximación  $|H_1(j\omega)|$  para  $\alpha < 1$ :

$$|H_1(j\omega)| \approx \begin{cases} 1 & \text{si } \omega < \alpha, \\ \frac{\alpha}{\omega} & \text{si } \alpha \leq \omega < 1, \\ \frac{\alpha}{\omega^2} & \text{si } \omega \geq 1 \end{cases}$$

Si bien esta forma de representación es válida para determinar propiedades de  $|H(j\omega)|$ , es más común graficar la potencia (o magnitud) de  $H(j\omega)$  en decibeles, para abarcar más frecuencias y que las curvas obtenidas sean lineales en  $\log(\omega)$ , lo cual hace más fácil su gráfica. Así,

$$|H_1(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log |H_1(j\omega)| \approx \begin{cases} 0 & \text{si } \omega < \alpha, \\ 20 \log(\alpha) - 20 \log(\omega) & \text{si } \alpha \leq \omega < 1, \\ 20 \log(\alpha) - 40 \log(\omega) & \text{si } \omega \geq 1. \end{cases}$$

De esta misma forma, se obtienen aproximaciones para  $|H_2(j\omega)|$  y  $|H_3(j\omega)|$ , donde  $\alpha = 1$  y  $\alpha > 1$  respectivamente:

$$|H_2(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 0 & \text{si } \omega < 1, \\ -40 \log(\omega) & \text{si } \omega \geq 1 \end{cases}$$

$$|H_3(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 0 & \text{si } \omega < 1 \\ -20 \log(\omega) & \text{si } 1 \leq \omega < \alpha, \\ 20 \log(\alpha) - 40 \log(\omega) & \text{si } \omega \geq \alpha. \end{cases}$$

Lo aquí analizado se estudiará posteriormente en el Capítulo 5. Las gráficas de la magnitud y fase de  $|H(j\omega)|_{\text{dB}}$  en escala logarítmica se denominan *diagramas de Bode*. Las gráficas correspondientes a los tres casos estudiados se encuentran en la Figura 3.7, en la cual se describen las curvas exactas de magnitud y fase con MATLAB.

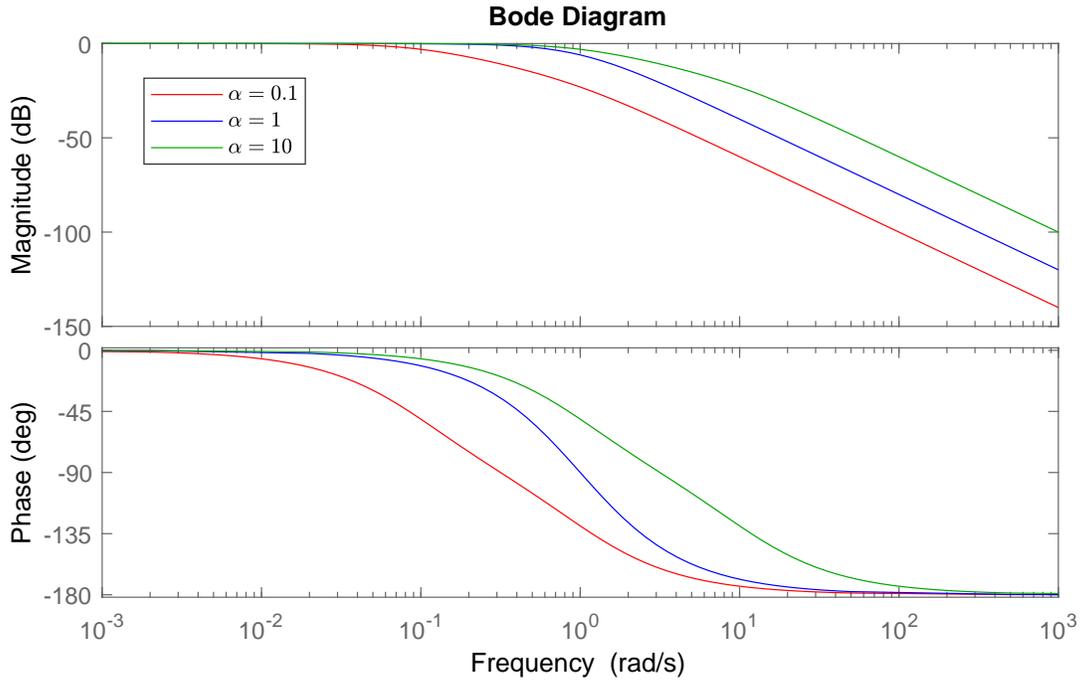


Figura 3.6: Diagramas de Bode de  $H(j\omega)$  con  $\alpha = 0,1$  (rojo),  $\alpha = 1$  (azul), y  $\alpha = 10$  (verde).

Ahora, se procederá a obtener la respuesta a escalón. A modo de ejemplo, sólo se considerarán los casos donde  $\alpha \neq 1$ . Sabiendo que  $U(j\omega) = 1/(j\omega) + \pi\delta(\omega)$ , se obtiene  $y(t)$  como

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\alpha}{(j\omega + 1)(j\omega + \alpha)} \left( \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right) \right\} \\
 &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right\} - \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\frac{\alpha}{\alpha-1}}{j\omega + 1} \right\} + \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{\frac{1}{\alpha-1}}{j\omega + \alpha} \right\} \\
 &= \left( 1 - \frac{\alpha}{\alpha-1}e^{-t} + \frac{1}{\alpha-1}e^{-\alpha t} \right) \mu(t).
 \end{aligned}$$

La respuesta a escalón de los tres sistemas estudiados anteriormente se grafica a continuación, en la Figura 3.7.

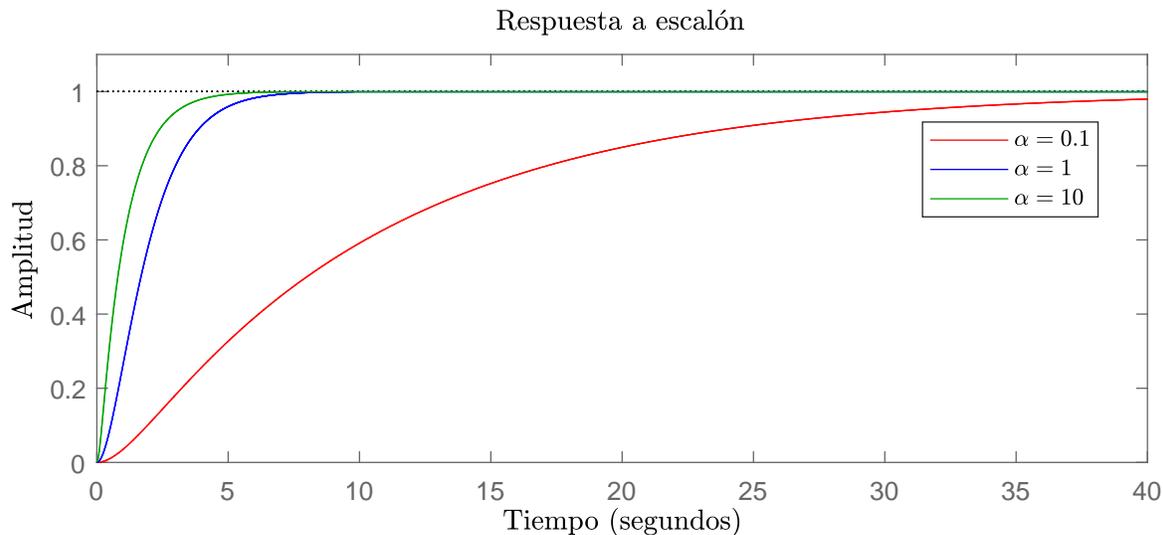


Figura 3.7: Respuesta a escalón de  $H(j\omega)$  con  $\alpha = 0,1$  (rojo),  $\alpha = 1$  (azul), y  $\alpha = 10$  (verde).

Note que a medida que  $\alpha$  aumenta, aumenta la velocidad de la respuesta transiente. Esto se pudo haber analizado directamente con el diagrama de Bode, observando que las respuestas verde y azul tienen mayor ganancia en alta frecuencia.  $\square$

**Ejercicio 3.7.2** (👉👉) Considere una señal continua  $f(t)$  con transformada de Fourier  $F(j\omega)$  con gráfica de magnitud dada por la Figura 3.8.

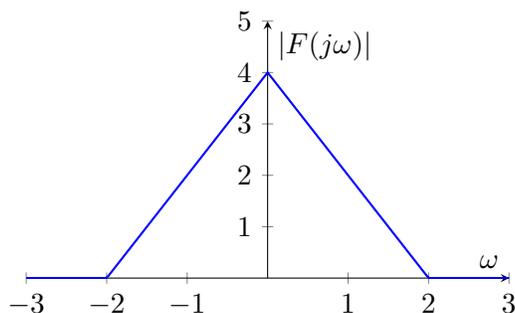


Figura 3.8: Magnitud de la transformada de Fourier de  $f(t)$ .

- Determine y dibuje  $|F_2(j\omega)|$ , la magnitud de la transformada de Fourier de  $f_2(t) = f(t) \cos(3t)$ .
- Determine y dibuje  $|F_3(j\omega)|$ , la magnitud de la transformada de Fourier de  $f_3(t) = f_2(t) \cos(3t)$ .
- Si  $H(j\omega) = \begin{cases} 2 & \text{si } |\omega| \leq 2 \\ 0 & \text{si } |\omega| > 2 \end{cases}$ , determine y dibuje  $F_4(j\omega) = H(j\omega)F_3(j\omega)$ .

**Desarrollo.**

a) Gracias a la propiedad de modulación

$$\mathcal{F}\{f(t) \cos(\omega_0 t)\} = \frac{1}{2} (\mathcal{F}\{f(t)e^{-j\omega_0 t}\} + \mathcal{F}\{f(t)e^{j\omega_0 t}\}) = \frac{1}{2}[F(j(\omega + \omega_0)) + F(j(\omega - \omega_0))],$$

se tiene<sup>7</sup>

$$\begin{aligned} |F_2(\omega)| &= \frac{1}{2}|F(j(\omega + 3)) + F(j(\omega - 3))| \\ &= \frac{|F(j(\omega + 3))|}{2} + \frac{|F(j(\omega - 3))|}{2} \\ &= \begin{cases} 2 - |\omega + 3| & \text{si } -5 \leq \omega < -1, \\ 2 - |\omega - 3| & \text{si } 1 \leq \omega < 5, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

El gráfico de este espectro se encuentra en la Figura 3.9.

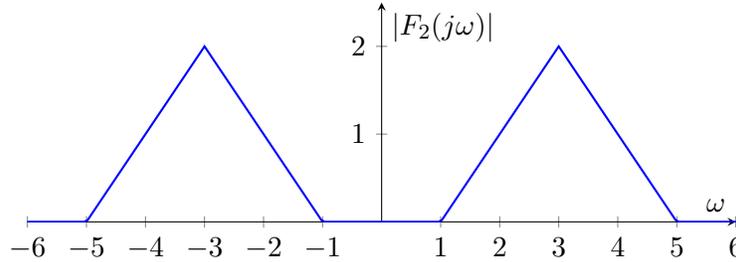


Figura 3.9: Magnitud de la transformada de Fourier de  $f_2(t)$ .

b) Aplicando la misma propiedad de modulación anteriormente deducida,

$$\begin{aligned} |F_3(j\omega)| &= \frac{1}{4}|F(j(\omega + 6)) + 2F(j(\omega)) + F(j(\omega - 6))| \\ &= \begin{cases} 1 - \frac{|\omega+6|}{2} & \text{si } -8 \leq \omega < -4, \\ 2 - |\omega| & \text{si } -2 \leq \omega < 2, \\ 1 - \frac{|\omega-6|}{2} & \text{si } 4 \leq \omega < 8, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

El gráfico de este espectro se encuentra en la Figura 3.10.

c) Dado que los espectros en altas frecuencias se encuentran en  $|\omega| > 2$ , estos sectores quedan anulados por  $H(\omega)$ . Lo único que queda amplificado por 2 es el espectro en baja frecuencia, obteniéndose el mismo espectro inicial (Figura 3.8). Es decir, se recupera el espectro inicial de forma perfecta.

**Nota:** El procedimiento anterior corresponde matemáticamente a la base de transmisión de información por amplitud modulada (modulación AM). Ésta es una de las aplicaciones típicas del análisis de Fourier y el tratamiento de espectros para la transformación de señales.  $\square$

<sup>7</sup>Note que en la segunda igualdad se ocupa el hecho que las funciones  $F(j(\omega + 3))$  y  $F(j(\omega - 3))$  no comparten soporte. Es decir, si  $F(j(\omega + 3)) \neq 0$  entonces necesariamente  $F(j(\omega - 3)) = 0$ , y si  $F(j(\omega - 3)) \neq 0$  entonces necesariamente  $F(j(\omega + 3)) = 0$ .

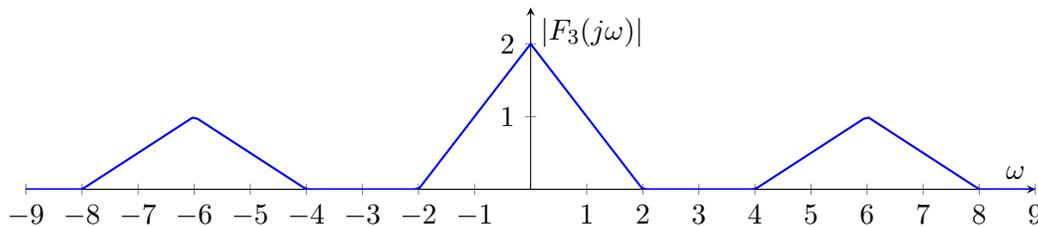


Figura 3.10: Magnitud de la transformada de Fourier de  $f_3(t)$ .

### 3.8. Serie de Fourier Discreta

Al igual que para el caso de tiempo continuo, una señal periódica de tiempo discreto puede representarse como la suma de exponenciales complejas de distinta frecuencia. Producto de la discretización, sólo se requieren  $N$  exponenciales complejas para representar una señal periódica de período  $N$ . Esto a diferencia del caso de tiempo continuo, donde generalmente se requieren infinitas exponenciales complejas y por tanto, calcular infinitos coeficientes.

Una señal periódica  $f[k]$  de período  $N$  se puede representar como

$$f[k] = \sum_{n=0}^{N-1} C_n e^{j\frac{2\pi}{N}nk},$$

donde

$$C_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f[k] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}. \quad (3.20)$$

**Nota:** Los coeficientes  $C_n$  también son periódicos de período  $N$ . La ecuación (3.20) representa una transformación muy usada en la práctica, llamada Transformada de Fourier Discreta (DFT). Ésta se ocupa en muchas áreas de la ingeniería, y existen métodos computacionales altamente optimizados para calcularla a partir de datos. El método general lleva el nombre de *Fast Fourier Transform* (FFT) [5].

La representación de una señal en términos de su serie de Fourier discreta sirve, entre otras cosas, para determinar salidas en estado estacionario, como se verá a continuación.

**Ejercicio 3.8.1** (☛☛) Sea la ERS con condiciones iniciales cero

$$y[k] - 0,5y[k-1] = u[k-1]. \quad (3.21)$$

Determine la salida en estado estacionario si

$$u[k] = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 2m \\ 2 & \text{si } k = 2m + 1 \end{cases}, m \in \mathbb{N}_0.$$

**Desarrollo.** En primer lugar, se determina la serie de Fourier de  $u[k]$ . El período de  $u[k]$  es 2. Entonces, su serie de Fourier es

$$u[k] = C_0 e^0 + C_1 e^{j\pi k},$$

donde

$$C_0 = \frac{1}{2}(1 + 2), \quad C_1 = \frac{1}{2}(1 + 2e^{-j\pi}). \quad (3.22)$$

Así,  $u[k] = (3 - (-1)^k)/2$ . Entonces, por linealidad e invarianza del tiempo de la ERS, podemos escribir la salida estacionaria  $y[k]$  como

$$y[k] = \sum_{n=0}^{N-1} C_n H(e^{j\frac{2\pi}{N}n}) e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad (3.23)$$

donde  $H(e^{j\frac{2\pi}{N}n})$  es la respuesta en frecuencia del sistema evaluada en  $\theta = 2\pi n/N$ . Para este ejercicio tenemos

$$H(e^{j\theta}) = \frac{1}{e^{j\theta} - 0,5},$$

con lo cual se obtiene  $H(1) = 2$  y  $H(e^{j\pi}) = -2/3$ . Entonces, la respuesta estacionaria es

$$\begin{aligned} y[k] &= C_0 H(e^0) e^0 + C_1 H(e^{j\pi}) e^{j\pi k} \\ &= 3 + \frac{(-1)^k}{3}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

**Nota:** Se puede determinar la validez de este resultado y su periodicidad a través de la ERS. Si se sabe que  $y[0] = 10/3$ , y  $u[0] = 1$ , a partir de la ERS se tiene que  $y[1] = 0,5y[0] + u[0] = 8/3$ , que justamente corresponde con el resultado (3.24) evaluado en  $k = 1$ . Nuevamente, si  $y[1] = 8/3$ , y  $u[1] = 2$ , a partir de la ERS se tiene que  $y[2] = 0,5y[1] + u[1] = 10/3$ , que también corresponde con el resultado (3.24) evaluado en  $k = 2$ . Así, se observa la periodicidad de  $y[k]$  y que el resultado en (3.24) es correcto.  $\square$

### 3.9. Transformada de Fourier de Tiempo Discreto

La transformada de Fourier de tiempo discreto (DTFT por sus siglas en inglés), es de gran utilidad en el procesamiento digital de señales, y es el análogo a la transformada de Fourier de tiempo continuo estudiada en la sección 3.4. La transformada de Fourier de tiempo discreto y su inversa se definen como

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{f[k]\} &= F(e^{j\theta}) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[k] e^{-j\theta k} \\ \mathcal{F}^{-1}\{F(e^{j\theta})\} &= f[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\theta}) e^{j\theta k} d\theta. \end{aligned}$$

**Ejercicio 3.9.1** (☛☛☛) Demuestre las siguientes propiedades:

1. *Modulación:* Si  $\mathcal{F}\{x[k]\} = X(e^{j\theta})$ , entonces  $\mathcal{F}\{x[k] \cos(\theta_0 k)\} = \frac{1}{2}[X(e^{j(\theta-\theta_0)}) + X(e^{j(\theta+\theta_0)})]$ .
2. *Teorema de Parseval:* Si  $\mathcal{F}\{x[k]\} = X(e^{j\theta})$  e  $\mathcal{F}\{y[k]\} = Y(e^{j\theta})$ , ambas  $x[k]$  e  $y[k]$  señales reales, entonces

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] y[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) \overline{Y(e^{j\theta})} d\theta, \quad (3.25)$$

donde  $\bar{\cdot}$  denota el conjugado de una función compleja.

**Desarrollo.**

1. Expandiendo el coseno por exponenciales imaginarias, y ocupando linealidad y definición de la transformada, se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{x(k) \cos(\theta_0 k)\} &= \frac{1}{2} \left( \mathcal{F}\{x(k)e^{j\theta_0 k}\} + \mathcal{F}\{x(k)e^{-j\theta_0 k}\} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{j\theta_0 k} e^{-j\theta k} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j\theta_0 k} e^{-j\theta k} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j(\theta-\theta_0)k} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)e^{-j(\theta+\theta_0)k} \right) \\
&= \frac{1}{2} [X(e^{j(\theta-\theta_0)}) + X(e^{j(\theta+\theta_0)})].
\end{aligned}$$

2. Desarrollando el lado izquierdo de (3.25):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[k] &\stackrel{(a)}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k] \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) e^{j\theta k} d\theta \\
&\stackrel{(b)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) \left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k] e^{j\theta k} \right) d\theta \\
&\stackrel{(c)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) \overline{\left( \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k] e^{-j\theta k} \right)} d\theta \\
&\stackrel{(d)}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) \overline{Y(e^{j\theta})} d\theta,
\end{aligned}$$

donde (a) es aplicando la definición de transformada inversa a  $x[k]$ , (b) se obtiene intercambiando integral con sumatoria, (c) es expresando la sumatoria como el conjugado del conjugado de los sumandos, y (d) se obtiene al aplicar la definición de la DTFT.  $\square$

## Capítulo 4

# Laplace y Zeta: Análisis bajo excitaciones arbitrarias

En este capítulo se estudian más herramientas matemáticas para el análisis de sistemas lineales de tiempo continuo y discreto. En particular, se revisan las transformadas de Laplace y Zeta. Estas transformaciones extienden el análisis de Fourier de sistemas lineales a excitaciones no periódicas, y permiten incorporar el efecto de las condiciones iniciales de forma explícita.

Ambas herramientas son tremendamente utilizadas en el estudio de canales de comunicación, síntesis de controladores lineales, procesamiento de señales, teoría de redes, modelamiento de dinámicas de sistemas, entre otras aplicaciones.

### 4.1. Transformada de Laplace: Definición

La transformada de Laplace permite el análisis conveniente de sistemas lineales de tiempo continuo. Es una herramienta de gran utilidad, pues facilita la resolución de ecuaciones diferenciales, haciendo más fácil su manipulación e interpretación. La transformada de Laplace de una función  $f(t)$  se define como

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \triangleq \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt. \quad (4.1)$$

**Nota:** El límite inferior de la integral es  $0_-$ , definido como  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} -|\epsilon|$ . De esta forma, tiene sentido el hecho que  $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$ . Sin embargo, existen otras definiciones para esta transformada que según el caso, pueden ser útiles (ver [2]).

Las propiedades más utilizadas de la transformada de Laplace se detallan a continuación:

1. Linealidad: Si  $\mathcal{L}\{f_1(t)\} = F_1(s)$  y  $\mathcal{L}\{f_2(t)\} = F_2(s)$ , entonces para  $a, b$  reales,

$$\mathcal{L}\{af_1(t) + bf_2(t)\} = aF_1(s) + bF_2(s).$$

2. Transformada de la derivada: Si  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , entonces

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = sF(s) - f(0_-). \quad (4.2)$$

3. Convolución: Si  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  y  $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$ , con  $f(t)$  y  $g(t)$  ambas causales, entonces

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)G(s).$$

4. Valor inicial: Si  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , entonces<sup>1</sup>

$$\lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s).$$

5. Valor final: Si  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ , y  $F(s)$  tiene todos sus polos en el semi-plano izquierdo abierto<sup>2</sup>, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s).$$

De aquí en adelante, por simplicidad se preferirá escribir  $f(0_+)$  y  $f(\infty)$  para los valores iniciales y finales de  $f(t)$ , respectivamente.

**Nota:** Se invita al lector demostrar estas propiedades. ¡Es una buena forma de aprenderlas!

**Ejercicio 4.1.1** (☛☛) *Determine la transformada de Laplace de las siguientes señales:*

1.  $f_1(t) = \cos(\omega_0 t)\mu(t)$

2.  $f_2(t) = t \sin(\omega_0 t)\mu(t)$

3.  $f_3(t) = \frac{e^{-3t}}{3}\mu(t) \int_0^t e^{3\tau} d\tau.$

**Desarrollo.**

1. Por definición, calculamos la integral (4.1) para este caso:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)\mu(t)\} &= \int_{0_-}^{\infty} \cos(\omega_0 t)e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{0_-}^{\infty} (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t})e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{e^{-(s+j\omega_0)t}}{-(s+j\omega_0)} + \frac{e^{-(s-j\omega_0)t}}{-(s-j\omega_0)} \right] \Big|_{0_-}^{\infty} \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{s+j\omega_0} + \frac{1}{s-j\omega_0} \right] \\ &= \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Note que el valor inicial calculado es aquel inmediatamente después del tiempo cero. Esto a diferencia del valor que se obtiene en (4.2), que corresponde al valor inmediatamente *antes* del tiempo cero.

<sup>2</sup>En el dominio del tiempo, esto es equivalente a requerir que el límite  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  exista.

2. En primer lugar, calculamos la transformada de  $\sin(\omega_0 t)\mu(t)$  gracias a la propiedad de derivación<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{\sin(\omega_0 t)\mu(t)\} &= \frac{-1}{\omega_0} \mathcal{L}\left\{\frac{d(\cos(\omega_0 t)\mu(t))}{dt} - \delta(t)\right\} \\ &= \frac{-1}{\omega_0} (s\mathcal{L}\{\cos(\omega_0 t)\mu(t)\} - 1) \\ &= \frac{-1}{\omega_0} \left(\frac{s^2}{s^2 + \omega_0^2} - 1\right) \\ &= \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}.\end{aligned}$$

Luego, gracias a que  $\mathcal{L}\{tf(t)\} = -dF(s)/ds$ , se obtiene finalmente

$$\mathcal{L}\{t \sin(\omega_0 t)\mu(t)\} = \frac{2s\omega_0}{(s^2 + \omega_0^2)^2}.$$

3. Una forma de proceder es calculando la integral, y luego aplicando la propiedad de linealidad a los términos obtenidos. Sin embargo, se puede reconocer una convolución al escribir

$$f_3(t) = \int_0^\infty \frac{1}{3} e^{-(t-\tau)} \mu(t-\tau) \mu(\tau) d\tau = \frac{1}{3} e^{-3t} \mu(t) * \mu(t). \quad (4.3)$$

De esta descripción, es inmediato que

$$\mathcal{L}\{f_3(t)\} = \frac{1}{3s(s+3)}. \quad \square$$

**Ejercicio 4.1.2** (☞☞☞) *Determine la transformada inversa de Laplace para  $F(s) = \frac{1}{s} \tanh\left(\frac{s}{2}\right)$ .*

**Desarrollo.** Antes de resolver, determinemos la transformada de Laplace de una función  $g(t)$  periódica de periodo  $T$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{g(t)\} &= \int_{0-}^\infty g(t) e^{-st} dt \\ &= \int_{0-}^T g(t) e^{-st} dt + \int_T^{2T} g(t) e^{-st} dt + \int_{2T}^{3T} g(t) e^{-st} dt + \dots \\ &= (1 + e^{-Ts} + e^{-2Ts} + \dots) \int_0^T g(t) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T g(t) e^{-st} dt.\end{aligned} \quad (4.4)$$

<sup>3</sup>Note que el escalón juega un papel importante en la derivada que se calcula:  $d(\cos(\omega_0 t)\mu(t))/dt = -\omega_0 \sin(\omega_0 t)\mu(t) + \delta(t)$ .

Ahora, analicemos  $F(s)$ :

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s} \tanh\left(\frac{s}{2}\right) \\ &= \frac{1}{s} \frac{e^{\frac{s}{2}} - e^{-\frac{s}{2}}}{e^{\frac{s}{2}} + e^{-\frac{s}{2}}} \\ &= \frac{1}{s} \frac{(e^s - 2 + e^{-s})}{e^s - e^{-s}} \\ &= \frac{1}{s} \frac{(1 - 2e^{-s} + e^{-2s})}{1 - e^{-2s}}. \end{aligned}$$

Comparando la última expresión con (4.4), se concluye que  $f(t)$  es periódica de periodo 2, donde

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ -1 & \text{si } 1 \leq t < 2, \end{cases}$$

con lo cual se obtiene la función  $f(t)$  pedida.  $\square$

## 4.2. Función de transferencia y EDS

Aplicando la Transformada de Laplace a una EDS lineal con condiciones iniciales iguales a cero, se obtiene directamente que

$$y(t) = h(t) * u(t) \iff Y(s) = H(s)U(s).$$

La función  $H(s)$  se conoce como *función de transferencia* y corresponde a la transformada de Laplace de la respuesta a impulso  $h(t)$  con condiciones iniciales cero. En los ejercicios siguientes veremos que la función de transferencia describe completamente la EDS de un sistema LTI, y viceversa.

**Ejercicio 4.2.1** (☛) *La respuesta de un sistema lineal e invariante en el tiempo a un impulso unitario y condiciones iniciales cero es  $h(t) = e^{-2t}\mu(t)$ . Usando la transformada de Laplace, calcule la respuesta del sistema a una entrada  $u(t) = e^{-3t}\mu(t)$  y condiciones iniciales cero.*

**Desarrollo.** Gracias a la transformada de Laplace, podemos obtener  $Y(s)$  como

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s+2} \frac{1}{s+3} = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+3}$$

Por ende, la respuesta pedida está dada por

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = (e^{-2t} - e^{-3t})\mu(t).$$

que es exactamente igual a la respuesta obtenida desarrollando la convolución en el dominio del tiempo (ver Ejercicio 2.4.2).  $\square$

**Ejercicio 4.2.2** (☛☛, Problema 7.6. de [1]) *Se sabe que la respuesta de un sistema lineal a un escalón unitario en su entrada (con condiciones iniciales iguales a cero) está dada por:*

$$g(t) = (2 - 2e^{-4t} + te^{-4t})\mu(t). \quad (4.5)$$

*Determine la función de transferencia del sistema, y la EDS. Usando las propiedades de la transformada de Laplace, calcule los valores inicial y final de la respuesta a escalón.*

**Desarrollo.** Aplicando transformada de Laplace en (4.5), escribimos

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{G(s)}{\frac{1}{s}} = \frac{\frac{2}{s} - \frac{2}{s+4} + \frac{1}{(s+4)^2}}{\frac{1}{s}} \\ &= \frac{9s+32}{(s+4)^2}. \end{aligned}$$

Entonces, sabiendo que  $H(s) = Y(s)/U(s)$ , la EDS se obtiene como

$$\begin{aligned} (s^2 + 8s + 16)Y(s) &= (9s + 32)U(s) \\ \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 8\frac{dy(t)}{dt} + 16y(t) &= 9\frac{du(t)}{dt} + 32u(t). \end{aligned}$$

Ahora procedemos a calcular los valores inicial y final utilizando las propiedades de la transformada de Laplace:

$$g(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 0, \quad g(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s) = \lim_{s \rightarrow 0} H(s) = 2,$$

A modo de comprobación, se puede obtener directamente a partir de (4.5) que

$$g(0_+) = 0, \quad g(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 2,$$

que corresponde con lo anteriormente calculado.  $\square$

**Ejercicio 4.2.3 (🐞🐞, Problema 7.3. de [1])** Considere un sistema definido por su ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 3u(t). \quad (4.6)$$

Determine la función de transferencia del sistema. Luego, determine la salida del sistema a entrada cero y condiciones iniciales  $dy(0)/dt = 1$  e  $y(0) = -1$ . Finalmente, obtenga la salida del sistema si la entrada es  $u(t) = \mu(t) - \mu(t-2)$ , con condiciones iniciales cero.

**Desarrollo.** Se obtiene la función de transferencia del sistema aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de (4.6), con condiciones iniciales cero:

$$(s^2 + s + 1)Y(s) = (s + 3)U(s) \implies H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s + 3}{s^2 + s + 1}.$$

Ahora, para determinar la salida del sistema frente a las condiciones iniciales dadas, resolvemos (4.6) con  $u(t) = 0$  usando la transformada de Laplace:

$$\begin{aligned} (s^2 + s + 1)Y_x(s) &= sy(0) + dy(0)/dt + y(0) \\ &= -s. \end{aligned}$$

Reescribiendo,

$$\begin{aligned} Y_x(s) &= \frac{-s}{s^2 + s + 1} \\ &= -\frac{s + \frac{1}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} + \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

Entonces, aplicando transformada inversa de Laplace se obtiene

$$y_x(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \left( \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) - \cos \left( \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \right] \mu(t).$$

Finalmente, para encontrar la salida del sistema frente a  $u(t) = \mu(t) - \mu(t-2)$ , se determina la transformada de Laplace de la respuesta a escalón de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Y_u(s) &= \frac{H(s)}{s} \\ &= \frac{s+3}{(s^2+s+1)s} \\ &= \frac{3}{s} - \frac{3s+2}{(s+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{3}{s} - 3 \frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}. \end{aligned}$$

Así, al aplicar transformada inversa,

$$y_u(t) = \left[ 3 - 3e^{-\frac{t}{2}} \cos \left( \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) + \frac{e^{-\frac{t}{2}}}{\sqrt{3}} \sin \left( \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \right] \mu(t). \quad (4.7)$$

Entonces, por linealidad e invarianza en el tiempo, la respuesta pedida con condiciones iniciales iguales a cero corresponde a

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathbf{T}\langle 0, \mu(t) - \mu(t-2) \rangle \\ &= \mathbf{T}\langle 0, \mu(t) \rangle - \mathbf{T}\langle 0, \mu(t-2) \rangle \\ &= y_u(t) - y_u(t-2), \end{aligned}$$

donde  $y_u(t)$  se encuentra determinado en (4.7). □

**Ejercicio 4.2.4** (☛☛☛) *Sea el modelo*

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 4y(t) = -2 \frac{du(t)}{dt} + 10u(t) \quad (4.8)$$

- Determine la función de transferencia. ¿Es el sistema estable?
- Si es posible, determine los valores inicial y final de la respuesta a impulso y de la respuesta a escalón. Además, obtenga la ganancia a frecuencia infinito.
- Determine la respuesta del sistema frente a una entrada  $u(t) = (e^{-2t} - 4te^{-2t})\mu(t)$  y condiciones iniciales cero. ¿Es la respuesta obtenida acotada? Aclare si hay contradicción con lo obtenido en a).
- Si  $u(t) = k(r(t) - y(t))$ , donde  $k$  es una constante, determine rangos de valores de  $k$  donde el sistema sea estable desde la nueva entrada  $r(t)$  hasta  $y(t)$ .

**Desarrollo.**

a) Aplicando transformada de Laplace en (4.8) con condiciones iniciales iguales a cero:

$$\begin{aligned} s^2 Y(s) - 4Y(s) &= -2sU(s) + 10U(s) \\ \implies H(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{-2s + 10}{s^2 - 4}. \end{aligned}$$

El sistema es inestable, pues la función de transferencia tiene un polo  $p_1 = 2$  en el semiplano derecho del plano complejo.

b) Denotamos  $h(t)$  y  $g(t)$  como las respuestas a impulso y escalón, respectivamente.

- Valor inicial de la respuesta a impulso:  $h(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sH(s) = -2$ .
- Valor final de la respuesta a impulso: No existe pues  $H(s)$  es inestable (no se puede ocupar el teorema del valor final).
- Valor inicial de la respuesta a escalón:  $g(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{H(s)}{s} = 0$ .
- Valor final de la respuesta a escalón: No existe pues  $H(s)$  es inestable (no se puede ocupar el teorema del valor final).
- Ganancia a frecuencia infinito: Con una entrada escalón unitario, el primer instante (cambio de 0 a 1) es de frecuencia infinita. Por ende,

$$K_\infty = \frac{g(0_+) - g(0_-)}{\mu(0_+) - \mu(0_-)} = g(0_+) = \lim_{s \rightarrow \infty} H(s) = 0.$$

c) Primero obtenemos la transformada de Laplace de la entrada como

$$U(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{4}{(s+2)^2} = \frac{s-2}{(s+2)^2}.$$

Entonces, la transformada de Laplace de la salida está dada por

$$Y(s) = H(s)U(s) = \frac{-2s+10}{(s+2)^3} = \frac{-2}{(s+2)^2} + \frac{14}{(s+2)^3}.$$

Al aplicar transformada de Laplace inversa, se obtiene<sup>4</sup>

$$y(t) = (-2t + 7t^2)e^{-2t}\mu(t).$$

Vemos que esta señal es acotada, pues  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$ . Esto no contradice la (in)estabilidad del sistema, pues inestabilidad implica que *existe al menos una* entrada acotada que produce una salida no acotada.

d) Determinando la nueva función de transferencia  $Y(s)/R(s)$  tenemos

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{kH(s)}{1+kH(s)} = \frac{k(-2s+10)}{s^2-2ks+(10k-4)}.$$

Aplicando el test de estabilidad para sistemas de segundo orden, se tienen las condiciones

$$\begin{aligned} -2k > 0 &\implies k < 0 \\ 10k - 4 > 0 &\implies k > \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Como deben cumplirse ambas restricciones en simultáneo, no existe  $k \in \mathbb{R}$  que estabilice el lazo.  $\square$

<sup>4</sup>Aquí se ocupó el hecho que  $\mathcal{L}\{t^n e^{-at}\mu(t)\} = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$ . Esta propiedad se puede deducir a través de múltiples integraciones por partes en la definición de la transformada de Laplace para esta señal.

### 4.3. Análisis transiente en tiempo continuo

**Ejercicio 4.3.1** (☛) *Obtenga la respuesta a escalón unitario, la ganancia a continua, el tiempo de levantamiento, y el tiempo de asentamiento. ¿Es razonable aproximar éste a  $4\tau$ ?*

$$1. H_1(s) = \frac{a}{s+b}, \quad b > 0$$

$$2. H_2(s) = \frac{s+a}{s+b}, \quad a > b > 0.$$

**Desarrollo.**

1. La respuesta a escalón  $g(t)$  es

$$g(t) = \frac{a}{b}(1 - e^{-bt})\mu(t).$$

Entonces, se tienen las siguientes características:

- Ganancia a continua:  $g(\infty) = a/b$ .
- Tiempo de levantamiento: 0 a 100 %: infinito. 0 a 90 %:  $\ln(10)/b$ .
- Tiempo de asentamiento: 95 %:  $\ln(20)/b$ . 98 %:  $\ln(50)/b$ .

2. La respuesta a escalón  $g(t)$  es

$$g(t) = \left( \frac{a}{b} - \frac{a-b}{b}e^{-bt} \right) \mu(t).$$

Entonces, se tienen las siguientes características:

- Ganancia a continua:  $g(\infty) = a/b$ .
- Tiempo de levantamiento (caída): Nunca se obtendrá el valor final en tiempo finito. Por ende, el tiempo de levantamiento hasta 100 % es infinito. Para otros porcentajes, se estudiará el tiempo de levantamiento hasta un  $x$  % del valor final, donde  $x < 100$ . Se tiene que

$$\frac{a}{b} - \frac{a-b}{b}e^{-bt_L} = \frac{x}{100} \frac{a}{b} \iff t_L = \frac{1}{b} \ln \left[ \frac{100(a-b)}{a(100-x)} \right],$$

válido para aquellos  $x, a, b$  donde  $\left[ \frac{100(a-b)}{a(100-x)} \right] > 1$ . Es decir,  $\frac{x}{100} \frac{a}{b} > 1$ . Esto corresponde a requerir que  $x$  % del valor final se encuentre entre los valores inicial  $g(0_+) = 1$  y final  $g(\infty) = a/b$ .

Note que para ambos casos, el tiempo de levantamiento hasta  $x$  % equivale al tiempo de asentamiento hasta el  $x$  %. □

**Ejercicio 4.3.2** (☛☛☛) *Obtenga la respuesta a escalón, la ganancia a continua, el tiempo de levantamiento a 100 %, y el overshoot ( $M_p$ ) a partir de la función de transferencia*

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

donde  $0 < \xi < 1$ ,  $\omega_n > 0$ .

**Desarrollo.** Definiendo  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$ , se calcula la respuesta a escalón integrando la respuesta a impulso:

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} \right\} \\
 &= \frac{\omega_n^2}{\omega_d} \int_0^t \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_d}{(s + \xi\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right\} d\tau \\
 &= \frac{\omega_n^2}{\omega_d} \int_0^t e^{-\xi\omega_n \tau} \sin(\omega_d \tau) d\tau \\
 &= \frac{\omega_n^2}{\omega_d} \left[ \frac{\omega_d}{\omega_n^2} - e^{-\xi\omega_n t} \frac{\omega_d \cos(\omega_d t) + \xi\omega_n \sin(\omega_d t)}{\omega_n^2} \right] \mu(t) \\
 &= \left[ 1 - e^{-\xi\omega_n t} \cos(\omega_d t) - \frac{\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t) \right] \mu(t) \\
 &= \left[ 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_d t + \arccos(\xi)) \right] \mu(t).
 \end{aligned}$$

Note que la ganancia a continua es  $g(\infty) = 1$ . Para el cálculo del tiempo de levantamiento, se resuelve la ecuación  $g(t_L) = 1$ :

$$g(t_L) = 1 \implies t_L = \frac{\pi - \arccos(\xi)}{\omega_d}. \quad (4.9)$$

Finalmente, para determinar el overshoot  $M_p$  de la respuesta a escalón, se deriva e iguala la respuesta a escalón a cero, para encontrar el valor mínimo de  $t > 0$  donde la derivada de la respuesta a escalón es cero:

$$\begin{aligned}
 \frac{dg(t)}{dt} = 0 &\iff \frac{-\omega_d e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cos(\omega_d t + \arccos(\xi)) + \frac{\xi\omega_n}{\sqrt{1 - \xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t + \arccos(\xi)) = 0 \\
 &\iff \tan(\omega_d t + \arccos(\xi)) = \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \\
 &\implies t = \frac{\pi}{\omega_d}.
 \end{aligned}$$

Entonces, reemplazando en  $g(t)$ , y restando el valor final, se obtiene que

$$M_p = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1 - \xi^2}}}. \quad \square$$

**Ejercicio 4.3.3** (♣) Sea el sistema lineal e invariante en el tiempo con función de transferencia

$$H_1(s) = \frac{9}{s^2 + 3s + 9},$$

con respuesta a escalón dada en la Figura 4.1. Grafique la respuesta a escalón del sistema

$$H_2(s) = \frac{36}{s^2 + 6s + 36}.$$

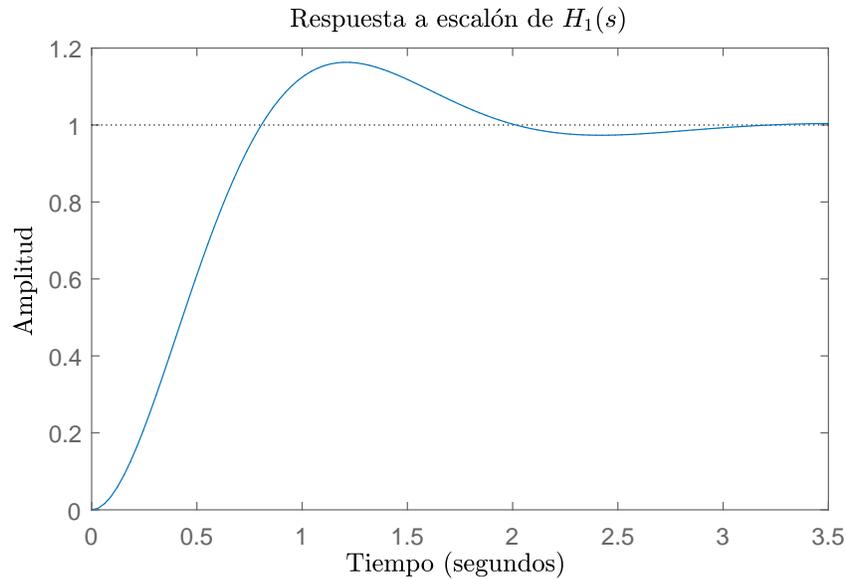


Figura 4.1: Respuesta a escalón del sistema con función de transferencia  $H_1(s)$ .

**Desarrollo.** El sistema  $H_1(s)$  puede escribirse como

$$H_1(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{3}\right)^2 + \left(\frac{s}{3}\right) + 1}, \quad (4.10)$$

mientras que  $H_2(s)$  puede expresarse como

$$H_2(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{6}\right)^2 + \left(\frac{s}{6}\right) + 1}, \quad (4.11)$$

con lo cual se deduce que  $H_2(s) = H_1\left(\frac{s}{2}\right)$ . Es decir, estos sistemas de segundo orden sólomente se diferencian en su valor  $\omega_n$ . Entonces, se estudiará el efecto de cambiar  $\omega_n$  en la respuesta a escalón.

Gracias a la propiedad de escalamiento, la respuesta a escalón del sistema  $H_2(s)$  está dada por

$$\begin{aligned} g_2(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{H_2(s)}{s} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{H_1\left(\frac{s}{2}\right)}{\frac{s}{2}} \right\} \\ &= g_1(2t), \end{aligned}$$

donde  $g_1(t)$  es la respuesta a escalón del sistema  $H_1(s)$ . En conclusión, el cambio en  $\omega_n$  es equivalente a un escalamiento de la respuesta a escalón en el dominio del tiempo. Esto se puede apreciar en la Figura 4.2, la cual si se compara con la Figura 4.1, lo único que cambia es la escala de tiempo.  $\square$

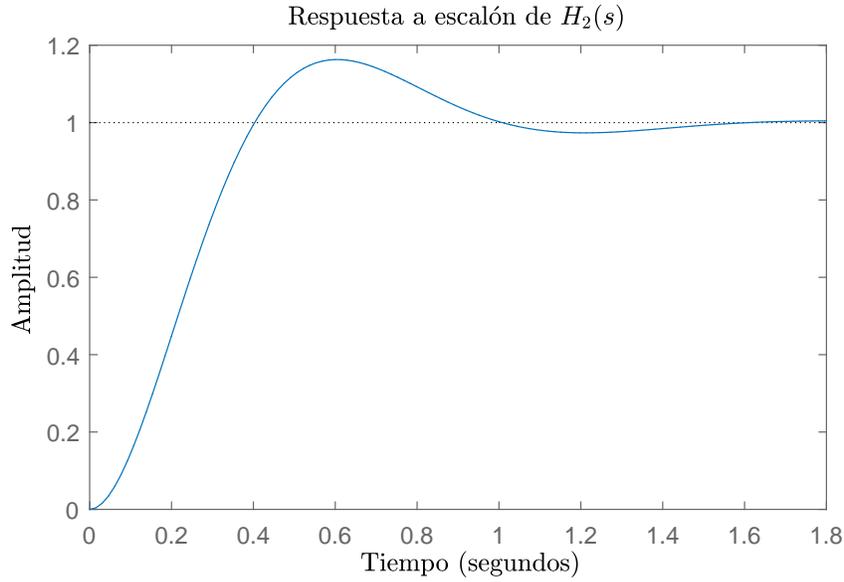


Figura 4.2: Respuesta a escalón del sistema con función de transferencia  $H_2(s)$ .

#### 4.4. Transformada Zeta: Definición

De forma análoga a la transformada de Laplace, la transformada Zeta permite el análisis conveniente de sistemas lineales en tiempo discreto. Facilita la resolución de ecuaciones recursivas, haciendo más fácil su manipulación e interpretación. La transformada Zeta se define como

$$\mathcal{Z}\{f[k]\} = F(z) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} f[k]z^{-k}. \quad (4.12)$$

Las propiedades más importantes de la transformada Zeta para la resolución de ecuaciones recursivas se detallan a continuación.

1. Linealidad: Si  $\mathcal{Z}\{f_1[k]\} = F_1(z)$  y  $\mathcal{Z}\{f_2[k]\} = F_2(z)$ , entonces para  $a, b$  reales,

$$\mathcal{Z}\{af_1[k] + bf_2[k]\} = aF_1(z) + bF_2(z).$$

2. Transformada del retraso: Si  $\mathcal{Z}\{f[k]\} = F(z)$ , entonces

$$\mathcal{Z}\{f[k-1]\} = z^{-1}F(z) + f(-1).$$

3. Transformada del adelanto: Si  $\mathcal{Z}\{f[k]\} = F(z)$ , entonces

$$\mathcal{Z}\{f[k+1]\} = zF(z) - zf(0).$$

4. Convolución: Si  $\mathcal{Z}\{f[k]\} = F(z)$  y  $\mathcal{Z}\{g[k]\} = G(z)$ , con  $f[k]$  y  $g[k]$  ambas causales, entonces

$$\mathcal{Z}\{f[k] * g[k]\} = F(z)G(z).$$

5. Valor inicial: Si  $\mathcal{Z}\{f[k]\} = F(z)$ , entonces

$$f[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z).$$

6. Valor final: Si  $\mathcal{Z}\{f[k]\} = F(z)$ , y el valor final de  $f[k]$  existe, entonces

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f[k] = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)F(z).$$

**Ejercicio 4.4.1** (☛☛) *Determine la transformada Zeta de las siguientes funciones de tiempo discreto:*

1.  $f_1[k] = \alpha^k \sin(\theta_0 k) \mu[k]$ , donde  $|\alpha| < 1$ .

2.  $f_2[k] = k\beta^k \mu[k]$ , donde  $|\beta| < 1$ .

3.  $f_3[k] = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0, 2, 4, 6, \dots \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$

**Desarrollo.**

1. Trabajamos por definición<sup>5</sup> (ver Apéndice 7.1).

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{\alpha^k \sin(\theta_0 k) \mu[k]\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \sin(\theta_0 k) z^{-k} \\ &= \frac{1}{2j} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{z}\right)^k (e^{j\theta_0 k} - e^{-j\theta_0 k}) \\ &= \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{1 - \frac{\alpha e^{j\theta_0}}{z}} - \frac{1}{1 - \frac{\alpha e^{-j\theta_0}}{z}} \right) \\ &= \frac{\frac{\alpha}{z} (e^{j\theta_0} - e^{-j\theta_0})}{1 - 2\frac{\alpha}{z} \left(\frac{e^{j\theta_0} + e^{-j\theta_0}}{2j}\right) + \frac{\alpha^2}{z^2}} \\ &= \frac{\alpha z \sin(\theta_0)}{z^2 - 2\alpha z \cos(\theta_0) + \alpha^2}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

2. Existen propiedades que permiten calcular esta transformada casi inmediatamente. En este apunte, tomamos otro camino. Note que podemos escribir la transformada pedida como

$$F_2(z) = \frac{\beta}{z} + 2 \left(\frac{\beta}{z}\right)^2 + 3 \left(\frac{\beta}{z}\right)^3 + \dots \tag{4.14}$$

Así, tenemos

$$\frac{\beta}{z} F_2(z) = \left(\frac{\beta}{z}\right)^2 + 2 \left(\frac{\beta}{z}\right)^3 + \dots \tag{4.15}$$

---

<sup>5</sup>Recuerde que  $\sin(x) = (e^{jx} - e^{-jx})/(2j)$  y  $\cos(x) = (e^{jx} + e^{-jx})/2$

Entonces, restando (4.14) con (4.15), obtenemos

$$\left(1 - \frac{\beta}{z}\right) F_2(z) = \frac{\beta}{z} + \left(\frac{\beta}{z}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{z}\right)^3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \beta^k z^{-k} = -1 + \frac{z}{z - \beta}.$$

Ordenando, se concluye que<sup>6</sup>

$$F_2(z) = \frac{\beta z}{(z - \beta)^2}.$$

3. Nuevamente por definición,

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{f_3[k]\} &= 1 + z^{-2} + z^{-4} + z^{-6} + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} z^{-2k} \\ &= \frac{z^2}{z^2 - 1}. \end{aligned} \quad \square$$

## 4.5. Función de Transferencia y ERS

De forma análoga al caso de tiempo continuo, al aplicar la transformada Zeta a una ERS lineal con condiciones iniciales iguales a cero se obtiene directamente la función de transferencia  $H(z)$  gracias a

$$y[k] = h[k] * u[k] \iff Y(z) = H(z)U(z).$$

Los cálculos de respuesta a impulso (de Kronecker), escalón unitario, y entrada arbitraria son análogos al caso continuo con la transformada de Laplace.

Aparte de la diferencia en la naturaleza de las condiciones iniciales (instante justo anterior a cero con sus derivadas en el caso de tiempo continuo, versus muestras anteriores al cero en el caso de tiempo discreto), otra diferencia se encuentra en la estabilidad: un sistema LTI de tiempo discreto es estable si y sólo si su función de transferencia  $H(z)$  tiene *todos sus polos con magnitud (como número complejo) estrictamente menor que uno*.

**Ejercicio 4.5.1** (♣) *La respuesta de un sistema lineal e invariante en el tiempo a un delta de Kronecker es  $h[k] = (0,7)^k \mu[k]$ . Usando la transformada Zeta, calcule la respuesta del sistema a una entrada  $u[k] = (0,3)^k \mu[k]$ .*

**Desarrollo.** Gracias a la transformada Zeta, podemos obtener  $Y(z)$  como

$$Y(z) = H(z)U(z) = \frac{z^2}{(z - 0,7)(z - 0,3)} = z \left( \frac{\frac{7}{4}}{z - 0,7} - \frac{\frac{3}{4}}{z - 0,3} \right).$$

Por ende, la respuesta pedida está dada por

$$y[k] = \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \left[ \frac{7}{4}(0,7)^k - \frac{3}{4}(0,3)^k \right] \mu[k],$$

que es exactamente igual a la respuesta obtenida desarrollando la convolución en el dominio del tiempo (ver Ejercicio 2.6.1). □

---

<sup>6</sup>Otra forma de obtener este resultado es a través de la propiedad de derivación  $\mathcal{Z}\{kf[k]\} = -z \frac{dF(z)}{dz}$ , con  $f[k] = \beta^k \mu[k]$  y  $F(z) = \frac{z}{z - \beta}$ .

**Ejercicio 4.5.2** (☛) *Determine la respuesta a impulso  $h[k]$  con condiciones iniciales cero para los siguientes sistemas:*

1.  $y[k] = 3u[k-1] + u[k-2] + 2u[k-4]$
2.  $y[k] = 0,5y[k-1] + 3u[k-1] + u[k-2]$ .

**Desarrollo.**

1. Para este caso, basta aplicar transformada Zeta a la ERS y fijar  $U(z) = 1$ :

$$\begin{aligned} Y(z) &= U(z)(3z^{-1} + z^{-2} + 2z^{-4}) \\ \implies H(z) &= 3z^{-1} + z^{-2} + 2z^{-4}. \end{aligned}$$

Entonces, por inspección,

$$h[k] = \begin{cases} 3 & \text{si } k = 1, \\ 1 & \text{si } k = 2, \\ 2 & \text{si } k = 4, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Esto se puede escribir como

$$h[k] = 3\delta_K[k-1] + \delta_K[k-2] + 2\delta_K[k-4].$$

2. Nuevamente, aplicando transformada Zeta y haciendo  $U(z) = 1$ :

$$\begin{aligned} Y(z)(1 - 0,5z^{-1}) &= U(z)(3z^{-1} + z^{-2}) \\ \implies H(z) &= \frac{3z + 1}{z(z - 0,5)} \\ H(z) &= -10 - \frac{2}{z} + \frac{10z}{z - 0,5}. \end{aligned}$$

Así, pasando al dominio del tiempo,

$$h[k] = -10\delta_K[k] - 2\delta_K[k-1] + 10(0,5)^k \mu[k]. \quad \square$$

**Ejercicio 4.5.3** (☛☛) *Sea el sistema*

$$2y[k] - 2y[k-1] + y[k-2] = -3u[k-1].$$

1. *Calcule la respuesta a impulso del sistema, con condiciones iniciales cero.*
2. *Calcule la respuesta  $y_x[k]$  a condiciones iniciales  $y[-1] = 1$  e  $y[-2] = 2$ , y entrada cero.*

**Desarrollo.**

1. Encontramos la función de transferencia del sistema aplicando la transformada Zeta a la EDS, con condiciones iniciales cero:

$$\begin{aligned} (2 - 2z^{-1} + z^{-2})Y(z) &= -3z^{-1}U(z) \\ \implies H(z) &= \frac{-\frac{3}{2}z}{z^2 - z + \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Esta función de transferencia se puede escribir como

$$H(z) = \frac{-3 \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)z}{z^2 - 2 \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)z + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2},$$

con lo cual, al usar el resultado del ejercicio 4.4.1, se obtiene

$$h[k] = -3 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k \sin\left(\frac{\pi}{4}k\right) \mu[k].$$

2. Esta vez, hacemos  $u[k] \equiv 0$  y consideramos condiciones iniciales distintas de cero:

$$(2 - 2z^{-1} + z^{-2})Y(z) - 2y[-1] + y[-2] + z^{-1}y[-1] = 0 \implies Y(z) = \frac{z^2(2y[-1] - y[-2]) - zy[-1]}{2z^2 - 2z + 1}.$$

Imponiendo las condiciones iniciales, queda simplemente

$$y_x[k] = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{-z}{2z^2 - 2z + 1} \right\} = -2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k \sin\left(\frac{\pi}{4}k\right) \mu[k],$$

donde se ha ocupado la misma transformada inversa que la parte anterior.  $\square$

**Ejercicio 4.5.4** (☞☞) *Determine  $H(z)$  y la ERS si la respuesta a la entrada  $u[k] = (-0,5)^k \mu[k]$  con condiciones iniciales cero es*

$$y[k] = \left[ \frac{4}{3} - (0,5)^{k-1} - \frac{1}{3}(-0,5)^{k-1} \right] \mu[k-1].$$

**Desarrollo.** Por linealidad, determinamos la transformada Zeta de cada sumando de la respuesta  $y[k]$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \left\{ \frac{4}{3} \mu[k-1] \right\} &= \frac{\frac{4}{3}}{z-1} \\ \mathcal{Z} \left\{ -(0,5)^{k-1} \mu[k-1] \right\} &= -\frac{1}{z-0,5} \\ \mathcal{Z} \left\{ -\frac{1}{3}(-0,5)^{k-1} \mu[k-1] \right\} &= -\frac{\frac{1}{3}}{z+0,5}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, por linealidad,

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{\frac{4}{3}}{z-1} - \frac{1}{z-0,5} - \frac{\frac{1}{3}}{z+0,5} \\ &= \frac{z}{(z-0,5)(z+0,5)(z-1)} \\ &= \frac{1}{(z-0,5)(z-1)}. \end{aligned}$$

Finalmente, la ERS puede obtenerse a partir de  $H(z)$  como

$$\begin{aligned}\frac{Y(z)}{U(z)} &= \frac{1}{(z-0,5)(z-1)} \\ \Leftrightarrow (1-1,5z^{-1}+0,5z^{-2})Y(z) &= z^{-2}U(z) \\ \Leftrightarrow y[k]-1,5y[k-1]+0,5y[k-2] &= u[k-2].\end{aligned}\quad \square$$

**Ejercicio 4.5.5** (☛☛☛) *Considere la ERS*

$$y[k+1]-0,25y[k-1]=u[k]+2u[k-2].$$

- Calcule  $y[k]$  para  $u[k]=\delta_K[k]-\delta_K[k-1]$ ,  $y[-1]=-4$  y las demás condiciones iniciales en cero.
- Obtenga los valores de  $y[k]$  para  $k=0,1,2$ .
- ¿Es estable la ERS?
- Obtenga el valor final de la respuesta a escalón.

**Desarrollo.**

- Aplicando transformada Zeta a la ERS, obtenemos

$$\begin{aligned}Y(z)-0,25y[-2]+z^{-1}y[-1]+z^{-2}Y(z) &= z^{-1}-z^{-2}+2z^{-3}-2z^{-4} \\ Y(z)(1-0,25z^{-2}) &= -z^{-2}+2z^{-3}-2z^{-4} \\ Y(z) &= \frac{-z^2+2z-2}{z^2(z-0,5)(z+0,5)} \\ Y(z) &= z\left(\frac{36}{z}-\frac{8}{z^2}+\frac{8}{z^3}-\frac{10}{z-0,5}-\frac{26}{z+0,5}\right),\end{aligned}$$

con lo cual se obtiene

$$y[k]=36\delta_K[k]-8\delta_K[k-1]+8\delta_K[k-2]-\left[10(0,5)^k+26(-0,5)^k\right]\mu[k].$$

- Reemplazando en el resultado obtenido en el punto anterior:

$$\begin{aligned}y[0] &= 36-(10+26)=0 \\ y[1] &= -8-(5-13)=0 \\ y[2] &= 8-\left[\frac{5}{2}+\frac{13}{2}\right]=-1.\end{aligned}$$

- Calculando la función de transferencia:

$$H(z)=\frac{z^2+2}{z(z-0,5)(z+0,5)},$$

se tiene que todos los polos de la función de transferencia tienen magnitud estrictamente menor que uno. Por lo tanto, la ERS es estable.

d) A partir de la función de transferencia, se calcula el valor final de la respuesta a escalón  $g[\infty]$  gracias a la propiedad de la transformada Zeta:

$$g[\infty] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)H(z) \frac{z}{z - 1} = H(1) = 4 \quad \square$$

**Ejercicio 4.5.6** (☞☞☞) Sea un sistema LTI con entrada  $u[k]$ , salida  $y[k]$  y condiciones iniciales  $\mathbf{y}_0$ . Si  $u_1[k] = (0,5)^k \mu[k]$ , la respuesta es  $y_1[k] = [2,5(0,2)^k + (k + 1,5)(0,5)^k] \mu[k]$ . Con condiciones iniciales  $2\mathbf{y}_0$  y señal de entrada  $u_2[k] = 0,5^{k+1} \mu[k]$ , la respuesta es  $y_2[k] = [2(0,2)^k + (6 + k)(0,5)^{k+1}] \mu[k]$ . Determine:

1. La respuesta del sistema frente a las condiciones iniciales  $\mathbf{y}_0$  y entrada cero, y la respuesta frente a la entrada  $u_1[k]$  con condiciones iniciales cero.
2. La ERS del sistema.
3. Las condiciones iniciales.

**Desarrollo.**

1. Dado que el sistema es lineal, puede escribirse

$$\begin{aligned} y_1[k] &= \mathbf{T}\langle \mathbf{y}_0, u_1[k] \rangle \\ y_2[k] &= \mathbf{T}\langle 2\mathbf{y}_0, 0,5u_1[k] \rangle, \end{aligned}$$

de modo que, por linealidad, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\langle \mathbf{y}_0, 0 \rangle + \mathbf{T}\langle 0, u_1[k] \rangle &= [2,5(0,2)^k + (k + 1,5)(0,5)^k] \mu[k] \\ 2\mathbf{T}\langle \mathbf{y}_0, 0 \rangle + 0,5\mathbf{T}\langle 0, u_1[k] \rangle &= [2(0,2)^k + (6 + k)(0,5)^{k+1}] \mu[k], \end{aligned}$$

donde las incógnitas son las señales  $\mathbf{T}\langle \mathbf{y}_0, 0 \rangle$  y  $\mathbf{T}\langle 0, u_1[k] \rangle$ . Este sistema de ecuaciones se resuelve con

$$\mathbf{T}\langle \mathbf{y}_0, 0 \rangle = 0,5[(0,2)^k + 3(0,5)^k] \mu[k], \quad \mathbf{T}\langle 0, u_1[k] \rangle = [2(0,2)^k + k(0,5)^k] \mu[k].$$

2. Podemos encontrar la ERS a partir de la función de transferencia del sistema. Como la función de transferencia se define con condiciones iniciales cero, ésta puede obtenerse a partir de los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{\mathcal{Z}\{[2(0,2)^k + k(0,5)^k] \mu[k]\}}{\mathcal{Z}\{(0,5)^k \mu[k]\}} \\ &= \frac{2z}{z - 0,2} + \frac{0,5z}{(z - 0,5)^2} \\ &= \frac{2z^2 - 1,5z + 0,4}{z^2 - 0,7z + 0,1}. \end{aligned}$$

De esta forma, puede concluirse que la ERS del sistema es

$$y[k] - 0,7y[k - 1] + 0,1y[k - 2] = 2u[k] - 1,5u[k - 1] + 0,4u[k - 2]. \quad (4.16)$$

3. Dado que el sistema es de orden 2, las condiciones iniciales son  $y[-1]$  y  $y[-2]$ . Aplicando transformada Zeta sobre (4.16) con entrada cero, se tiene que

$$Y(z) - 0,7(z^{-1}Y(z) + y[-1]) + 0,1(z^{-2}Y(z) + z^{-1}y[-1] + y[-2]) = 0,$$

con lo cual obtenemos

$$\mathbf{T}\langle \mathbf{y}_0, 0 \rangle = \mathcal{Z}^{-1} \left\{ \frac{z^2(0,7y[-1] - 0,1y[-2]) - 0,1zy[-1]}{z^2 - 0,7z + 0,1} \right\}. \quad (4.17)$$

Por otro lado, al calcular la transformada Zeta de la respuesta a condiciones iniciales obtenida anteriormente, se tiene

$$\mathcal{Z}\{\mathbf{T}\langle \mathbf{y}_0, 0 \rangle\} = \frac{0,5z}{z - 0,2} + \frac{1,5z}{z - 0,5} = \frac{2z^2 - 0,55z}{z^2 - 0,7z + 0,1}.$$

Igualando coeficientes con la transformada Zeta obtenida en (4.17), concluimos que  $y[-1] = 5,5$ , e  $y[-2] = 18,5$ .  $\square$

## Capítulo 5

# Representaciones de sistemas lineales

En este apunte ya se han visto varias formas de describir un sistema lineal e invariante en el tiempo, como la EDS, la función de transferencia, la respuesta en frecuencia, o la respuesta a impulso. En ocasiones, conviene representar estas ecuaciones o funciones de otras maneras.

Una forma consiste en reescribir la EDS en términos de *variables de estado*. Éstas pueden describir variables internas del sistema que no son explícitamente descritas en las otras representaciones, ganando así mayor intuición sobre las dinámicas modeladas. Adicionalmente, al escribir el sistema por su representación en variables de estado, se obtienen ganancias computacionales y algorítmicas. Las señales se obtienen a partir de cálculos matriciales, lo cual es más adecuado para el trabajo con computador. Además, muchos algoritmos de control óptimo uni y multi-variable están descritos en términos de variables de estado.

Luego, se estudiarán 3 formas gráficas de representar sistemas: diagramas de bloques, diagramas de Bode, y diagramas de Nyquist. Estas tres se basan en una representación en frecuencia del sistema LTI. Diagramas de bloques son adecuados para representar interconexiones y sistemas complejos, mientras que los diagramas de Bode y Nyquist son útiles para visualizar de forma más clara el comportamiento del sistema frente a bajas, medias, y altas frecuencias. Esto posteriormente sirve para el diseño robusto de controladores, márgenes de estabilidad, entre otras aplicaciones.

### 5.1. Variables de Estado

Un sistema dinámico lineal puede representarse con las siguientes ecuaciones lineales en tiempo continuo y tiempo discreto:

Tiempo continuo:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t).\end{aligned}\tag{5.1}$$

Tiempo discreto:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}[k + 1] &= \mathbf{A}\mathbf{x}[k] + \mathbf{B}u[k] \\ y[k] &= \mathbf{C}\mathbf{x}[k] + \mathbf{D}u[k],\end{aligned}\tag{5.2}$$

donde  $u$  es la señal de entrada,  $\mathbf{x}$  es el vector de estado, e  $y$  es la señal de salida.

**Nota:** Una diferencia no menor en las representaciones de variables de estado de tiempo continuo y discreto es la interpretación de las condiciones iniciales. Para tiempo continuo,  $\mathbf{x}(0_-)$  se puede relacionar con el valor de la salida y sus derivadas inmediatamente antes al momento cero, y para tiempo discreto  $\mathbf{x}[0]$  puede relacionarse con los valores de la salida en instantes de tiempo anteriores al tiempo cero.

**Relación con la función de transferencia:** Aplicando transformada de Laplace y transformada Zeta en (5.1) y (5.2) respectivamente, se obtienen las siguientes expresiones para la función de transferencia:

Tiempo continuo:

$$H(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}.$$

Tiempo discreto:

$$H(z) = \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}.$$

**Ejercicio 5.1.1 (✎)** Determine el modelo en variables de estado y la función de transferencia de los siguientes sistemas:

1.  $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \omega^2y(t) = u(t)$

2.  $y[k] = u[k - 4].$

**Desarrollo.**

1. Haciendo  $x_1(t) = y(t)$ ,  $x_2(t) = dx_1(t)/dt = dy(t)/dt$ , se obtiene directamente que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + [0]u(t). \end{aligned}$$

Entonces, la función de transferencia del sistema está dada por

$$\begin{aligned} H(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} s & -1 \\ \omega^2 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + [0] \\ &= \frac{1}{s^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

2. En primer lugar se expresa la ecuación recursiva como  $y[k + 4] = u[k]$ . Luego, definiendo los estados  $x_1[k] = y[k]$ ,  $x_2[k] = x_1[k + 1] = y[k + 1]$ ,  $x_3[k] = x_2[k + 1] = y[k + 2]$  e

$x_4[k] = x_3[k + 1] = y[k + 3]$ , se obtiene el siguiente modelo en variables de estado:

$$\begin{bmatrix} x_1[k + 1] \\ x_2[k + 1] \\ x_3[k + 1] \\ x_4[k + 1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ x_3[k] \\ x_4[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u[k]$$

$$y[k] = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ x_3[k] \\ x_4[k] \end{bmatrix} + [0]u[k].$$

Entonces, la función de transferencia del sistema está dada por

$$\begin{aligned} H(z) &= \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &= [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} z & -1 & 0 & 0 \\ 0 & z & -1 & 0 \\ 0 & 0 & z & -1 \\ 0 & 0 & 0 & z \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + [0] \\ &= \frac{1}{z^4}. \end{aligned}$$

Note que para obtener la última igualdad, no es necesario obtener la inversa de toda la matriz, sino que solamente el elemento de la primera fila, última columna.  $\square$

**Ejercicio 5.1.2** (☛☛) *Determine el modelo en variables de estado, la función de transferencia por variables de estado, y la respuesta a escalón de los siguientes sistemas:*

1.  $\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 2u(t)$
2.  $y[k] = 0,5y[k - 1] + u[k] + u[k - 1]$
3.  $\frac{dy^2(t)}{dt^2} = 3u(t)$ .

**Desarrollo.**

1. Calculamos la función de transferencia directamente con transformada de Laplace:

$$H(s) = \frac{s + 2}{s + 3} = 1 - \frac{1}{s + 3}.$$

Así,  $\mathbf{D} = 1$ . Se calculan las demás matrices a partir de la parte estrictamente propia de  $H(s)$ , en donde  $\mathbf{D} = 0$  y  $Y(s)/U(s) = -1/(s + 3)$ , obteniéndose

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &= -3x(t) - u(t) \\ y(t) &= x(t) + u(t). \end{aligned}$$

Se puede obtener de vuelta la función de transferencia como

$$\begin{aligned} H(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &= -\frac{1}{s+3} + 1 \\ &= \frac{s+2}{s+3}. \end{aligned}$$

Para el cálculo de la respuesta a escalón, desarrollamos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{H(s)}{s}\right\} &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \frac{\mathbf{D}}{s}\right\} \\ &= \mathbf{D}\mu(t) + \mathbf{C} \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau} d\tau \mathbf{B}\mu(t) \\ &= \mu(t) - \int_0^t e^{-3\tau} d\tau \mu(t) \\ &= \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{-3t}\right)\mu(t). \end{aligned}$$

2. Calculamos la función de transferencia directamente con la transformada Zeta:

$$H(z) = \frac{z+1}{z-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\frac{3}{2}}{z-\frac{1}{2}}.$$

Así,  $\mathbf{D} = 1$ . Se calculan las demás matrices a partir de la parte estrictamente propia de  $H(z)$ , en donde  $\mathbf{D} = 0$  y  $Y(z)/U(z) = \frac{3}{2}/(z - \frac{1}{2})$ , obteniéndose

$$\begin{aligned} x[k+1] &= \frac{1}{2}x[k] + \frac{3}{2}u[k] \\ y[k] &= x[k] + u[k]. \end{aligned}$$

Al igual que la parte anterior, se obtiene la función de transferencia por

$$\begin{aligned} H(z) &= \mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &= \frac{\frac{3}{2}}{z-\frac{1}{2}} + 1 \\ &= \frac{z+1}{z-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Para el cálculo de la respuesta a escalón, desarrollamos

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{zH(z)}{z-1}\right\} &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-1}\mathbf{C}(z\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \frac{\mathbf{D}z}{z-1}\right\} \\ &= \mathbf{D}\mu[k] + \mathbf{C}(\mu[k-1] * \mathbf{A}^k \mu[k])\mathbf{B} \\ &= \mathbf{D}\mu[k] + \mathbf{C} \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{A}^{k-i} \mu[k-i] \mu[i-1] \mathbf{B} \\ &= \mu[k] + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-i} \mu[k-1] \\ &= \mu[k] + \frac{3}{2} \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right] \mu[k-1]. \end{aligned}$$

**Nota:** El resultado obtenido es igual a  $y[k] = \left[4 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^k\right] \mu[k]$ , que corresponde a la transformada Zeta inversa de la función de transferencia multiplicada por  $z/(z-1)$ .

3. Hacemos  $x_1(t) = y(t)$ , y  $x_2(t) = dy(t)/dt = dx_1(t)/dt$ . Así, escribimos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + [0]u(t). \end{aligned}$$

Entonces, la función de transferencia del sistema está dada por

$$\begin{aligned} H(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + [0] \\ &= \frac{3}{s^2}. \end{aligned}$$

Finalmente, el cálculo de la respuesta a escalón  $g(t)$  se puede hacer secuencialmente. Primero, notamos que debe cumplirse que  $dx_2(t)/dt = 3\mu(t)$ . Esto es,  $x_2(t) = 3t\mu(t)$ . Como  $x_2(t) = dx_1(t)/dt$ , obtenemos que la respuesta a escalón es  $g(t) = 1,5t^2\mu(t)$ .  $\square$

**Ejercicio 5.1.3** (☛☛☛) Considere el siguiente sistema descrito en variables de estado:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + [0]u(t). \end{aligned}$$

1. Si  $y(0_-) = 3$  e  $dy(0_-)/dt = 0$ , obtenga las condiciones iniciales  $x_1(0_-)$  y  $x_2(0_-)$ .
2. Usando la representación en variables de estado, obtenga la respuesta del sistema frente a las condiciones iniciales anteriormente descritas, con entrada cero.
3. Determine  $x_2(t)$  si  $u(t) = e^{-t}\mu(t)$ , con condiciones iniciales cero.
4. ¿Es el sistema estable? Obtenga la función de transferencia.
5. Obtenga otra representación equivalente de variables de estado donde la matriz  $\mathbf{A}$  sea diagonal.

**Desarrollo.**

1. Por la ecuación que relaciona la salida con los estados, al evaluar  $t = 0_-$  se tiene

$$y(0_-) = x_1(0_-) + 2x_2(0_-).$$

Al derivar la misma ecuación y fijar  $t = 0_-$ , se obtiene

$$\frac{dy(0_-)}{dt} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dx_1(0_-)}{dt} \\ \frac{dx_2(0_-)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0_-) \\ x_2(0_-) \end{bmatrix}.$$

Hemos llegado a dos ecuaciones con dos incógnitas,  $x_1(0_-)$  y  $x_2(0_-)$ . La solución de este sistema de ecuaciones es  $x_1(0_-) = 2$  y  $x_2(0_-) = 0,5$ .

2. Al aplicar transformada de Laplace en la ecuación de estado con entrada cero, se obtiene

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} sX_1(s) \\ sX_2(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1(0_-) \\ x_2(0_-) \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} s & 2 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 0,5 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} 2s+5 \\ 0,5s+2 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

lo cual implica que la transformada de Laplace de la respuesta a estado,  $Y_x(s)$ , está dada por

$$Y_x(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2s+5 \\ 0,5s+2 \end{bmatrix} = \frac{3(s+3)}{(s+1)(s+2)}.$$

Finalmente, obtenemos la señal pedida a partir de la transformada inversa de Laplace:

$$y_x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3(s+3)}{(s+1)(s+2)} \right\} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{6}{s+1} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{3}{s+2} \right\} = (6e^{-t} - 3e^{-2t})\mu(t).$$

3. Nuevamente aplicamos transformada de Laplace en la ecuación de estado, pero esta vez con condiciones iniciales cero:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} sX_1(s) \\ sX_2(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} + \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} &= \frac{1}{s+1} \begin{bmatrix} s & 2 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(s+1)^2(s+2)} \begin{bmatrix} -2 \\ s \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace a  $X_2(s)$  se obtiene

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{(s+1)^2(s+2)} \right\} \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s+1} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s+1)^2} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{2}{s+2} \right\} \\ &= (2e^{-t} - te^{-t} - 2e^{-2t})\mu(t). \end{aligned}$$

4. Analizamos estabilidad al calcular los autovalores de la matriz  $\mathbf{A}$  de estado:

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \iff \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ -1 & \lambda+3 \end{vmatrix} = 0 \iff (\lambda+1)(\lambda+2) = 0. \quad (5.3)$$

Esto implica que los autovalores son  $\lambda_1 = -1$  y  $\lambda_2 = -2$ , los cuales tienen parte real negativa. Por lo tanto, el sistema es estable.

Calculamos la función de transferencia con el desarrollo estándar:

$$\begin{aligned} H(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+3 & -2 \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{2(s-1)}{(s+1)(s+2)}. \end{aligned}$$

5. Para encontrar una representación diagonal, se debe diagonalizar la matriz  $\mathbf{A}$  de la representación en variables de estado. Con un poco de álgebra, puede encontrarse que

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\triangleq \mathbf{P}} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}_{\triangleq \mathbf{D}_A} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}}_{=\mathbf{P}^{-1}}$$

Entonces, hacemos el cambio de variable

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

para reescribir las ecuaciones de variables de estado con matrices  $(\mathbf{D}_A, \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}, \mathbf{C}\mathbf{P}, \mathbf{0})$ , obteniendo

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{d\tilde{x}_1(t)}{dt} \\ \frac{d\tilde{x}_2(t)}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [4 \quad 3] \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_2(t) \end{bmatrix} + [0]u(t). \end{aligned} \quad \square$$

**Ejercicio 5.1.4** (☛☛☛) Considere la función de transferencia de un sistema de tiempo discreto en la que no hay cancelaciones:

$$H(z) = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \cdots + b_1z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0}. \quad (5.5)$$

Demuestre que una realización mínima en variables de estado de dicho sistema está dada por las matrices:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} & \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{C} &= [b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_{n-1}] & \mathbf{D} &= [0]. \end{aligned}$$

**Desarrollo.** El truco consiste en crear una señal auxiliar con transformada  $X(z)$ , la cual será la transformada Zeta del primer elemento de nuestro vector de estados. Expresamos la  $H(z)$  como

$$H(z) = \frac{b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-2}z^{n-2} + \cdots + b_1z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0} = \frac{Y(z)}{X(z)} \frac{X(z)}{U(z)}.$$

Así, se pueden formar las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \frac{U(z)}{X(z)} &= a_0 + a_1z + \cdots + a_{n-1}z^{n-1} + z^n \\ \frac{Y(z)}{X(z)} &= b_0 + b_1z + \cdots + b_{n-2}z^{n-2} + b_{n-1}z^{n-1}. \end{aligned}$$

Pasando estas igualdades al tiempo:

$$u[k] = a_0x[k] + a_1x[k+1] + \cdots + a_{n-1}x[k+n-1] + x[k+n] \quad (5.6)$$

$$y[k] = b_0x[k] + b_1x[k+1] + \cdots + b_{n-2}x[k+n-2] + b_{n-1}x[k+n-1]. \quad (5.7)$$

Por lo tanto, al definir los estados  $x_1[k] = x[k]$ ,  $x_2[k] = x_1[k+1] = x[k+1]$ , ...  $x_n[k] = x_{n-1}[k+1] = x[k+n]$ , las ecuaciones (5.6) y (5.7) se pueden expresar como

$$\begin{aligned} y[k] &= b_0x_1[k] + b_1x_2[k] + \cdots + b_{n-2}x_{n-1}[k] + b_{n-1}x_n[k] \\ x_n[k+1] &= -a_0x_1[k] - a_1x_2[k] - \cdots - a_{n-1}x_n[k] + u[k]. \end{aligned}$$

Finalmente, expresando estas últimas ecuaciones de forma matricial, en conjunto con las definiciones de los estados escritos anteriormente, se tiene la representación en variables de estado

$$\begin{bmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \\ \vdots \\ x_{n-1}[k+1] \\ x_n[k+1] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ \vdots \\ x_{n-1}[k] \\ x_n[k] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u[k]$$

$$y[k] = [b_0 \quad b_1 \quad \cdots \quad b_{n-2} \quad b_{n-1}] \begin{bmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \\ \vdots \\ x_{n-1}[k] \\ x_n[k] \end{bmatrix} + [0] u[k].$$

**Nota:** Si  $H(z)$  fuese función de transferencia bipropia, es decir, con numerador de mismo grado que denominador, basta dividir los polinomios numerador y denominador para separar  $H(z)$  como  $H(z) = H(\infty) + H_{sp}(z)$ , donde  $H_{sp}(z)$  es estrictamente propia. Entonces, solamente debe aplicarse este método a  $H_{sp}(z)$ , y el término asociado a  $H(\infty)$  corresponde a la matriz  $\mathbf{D}$  de la representación en variables de estado de  $H(z)$ . Finalmente, note que el desarrollo no varía mucho si en vez de tener una función de transferencia de tiempo discreto, se hubiera tenido una de tiempo continuo.  $\square$

**Ejercicio 5.1.5** (♣) Considere el sistema en cascada de la Figura 5.1, donde  $G_1(s)$  y  $G_2(s)$  tienen representaciones en variables de estado dadas por  $(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1, \mathbf{D}_1)$  y  $(\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2, \mathbf{D}_2)$  respectivamente. Determine una representación en variables de estado para  $G_1G_2$  (es decir, de  $u(t)$  a  $y(t)$ ).

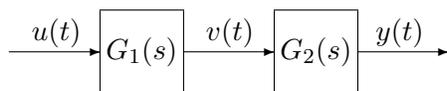


Figura 5.1: Diagrama de bloques de un sistema en cascada.

**Desarrollo.** Escribimos las ecuaciones de variable de estado para cada sistema por separado como

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}_1(t)}{dt} &= \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{B}_1u(t) & \frac{d\mathbf{x}_2(t)}{dt} &= \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{B}_2v(t) \\ v(t) &= \mathbf{C}_1\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{D}_1u(t) & y(t) &= \mathbf{C}_2\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{D}_2v(t).\end{aligned}$$

De estas ecuaciones, podemos escribir  $d\mathbf{x}_2(t)/dt$  e  $y(t)$  respectivamente como

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}_2(t)}{dt} &= \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{C}_1\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{D}_1u(t) \\ y(t) &= \mathbf{C}_2\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{D}_2\mathbf{C}_1\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{D}_2\mathbf{D}_1u(t)\end{aligned}$$

Con esto, obtenemos que una posible representación en variables de estado está dada por

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{x}_1(t)}{dt} \\ \frac{d\mathbf{x}_2(t)}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ \mathbf{B}_2\mathbf{C}_1 & \mathbf{A}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2\mathbf{D}_1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [\mathbf{D}_2\mathbf{C}_1 \quad \mathbf{C}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} + \mathbf{D}_2\mathbf{D}_1u(t).\end{aligned}\quad \square$$

## 5.2. Diagramas de bloques

Un diagrama de bloques de gran interés en control es el diagrama de lazo realimentado siguiente:

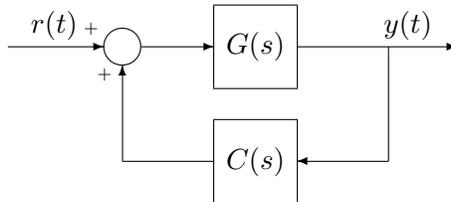


Figura 5.2: Diagrama de bloques de un lazo realimentado.

La función de transferencia  $T(s) = Y(s)/R(s)$  se obtiene a partir de

$$[R(s) - C(s)Y(s)]G(s) = Y(s) \implies T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 - G(s)C(s)}. \quad (5.8)$$

Note que este no es el esquema único de realimentación utilizado en control. De hecho, no es el diagrama estándar visto en Control Automático I. Sin embargo, se estudia en esta sección por su generalidad, y como ejemplo ilustrativo del método a ocupar para obtener funciones de transferencia a partir de estos diagramas.

**Ejercicio 5.2.1** (☛☛) Considere el diagrama de bloques representado en la Figura 5.3. Obtenga las siguientes funciones de transferencia:

1.  $T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)}$

$$2. S_o(s) = \frac{Y(s)}{D_o(s)}$$

$$3. S_{i_o}(s) = \frac{Y(s)}{D_i(s)}$$

$$4. S_{u_o}(s) = \frac{U(s)}{-D_o(s)}.$$

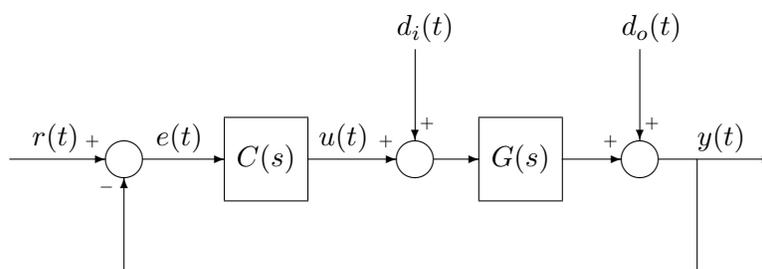


Figura 5.3: Diagrama de bloques de un lazo de control por realimentación.

**Desarrollo.** Para las primeras tres transferencias, determinamos  $Y(s)$  en función de  $R(s)$ ,  $D_o(s)$  y  $D_i(s)$ :

$$\begin{aligned} Y(s) &= [C(s)(R(s) - Y(s)) + D_i(s)] + D_o(s) \\ \Rightarrow Y(s) &= \underbrace{\frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)}}_{T(s)} R(s) + \underbrace{\frac{1}{1 + G(s)C(s)}}_{S_o(s)} D_o(s) + \underbrace{\frac{G(s)}{1 + G(s)C(s)}}_{S_{i_o}(s)} D_i(s). \end{aligned}$$

Note que las asignaciones de  $T(s)$ ,  $S_o(s)$  y  $S_{i_o}(s)$  son válidas pues cada función de transferencia se debe calcular como la relación entre transformadas de Laplace con condiciones iniciales cero y *demás entradas cero*. Gracias a que el sistema es lineal, podemos descomponer la transformada de salida  $Y(s)$  en los efectos desacoplados de  $r(t)$ ,  $d_o(t)$  y  $d_i(t)$ .

Finalmente, para  $S_{u_o}(s)$ , podemos expresar  $U(s)$  en términos de  $R(s)$ ,  $D_o(s)$  y  $D_i(s)$ :

$$\begin{aligned} U(s) &= C(s)(R(s) - Y(s)) \\ &= C(s)(R(s) - [G(s)(U(s) + D_i(s)) + D_o(s)]) \\ \Rightarrow U(s) &= \frac{C(s)}{1 + G(s)C(s)} R(s) - \underbrace{\frac{C(s)}{1 + G(s)C(s)}}_{S_{u_o}(s)} D_o(s) - \frac{G(s)C(s)}{1 + G(s)C(s)} D_i(s). \end{aligned}$$

**Nota:** Las funciones de transferencia aquí calculadas son las cuatro funciones de sensibilidad de un lazo de control. En control, el diseño de  $C(s)$  implica estudiar cómo el controlador afecta a estas cuatro funciones de transferencia. En particular, se desearía que  $T(s) \approx 1$ , pues esto aseguraría que  $r(t) \approx y(t)$ , y a su vez eso implicaría rechazo a la perturbaciones, pues  $T(s) \approx 1$  generalmente implica que  $S_o(s) \approx 0$  y  $S_{i_o}(s) \approx 0$ . Para más sobre esta materia, el lector puede consultar [6].  $\square$

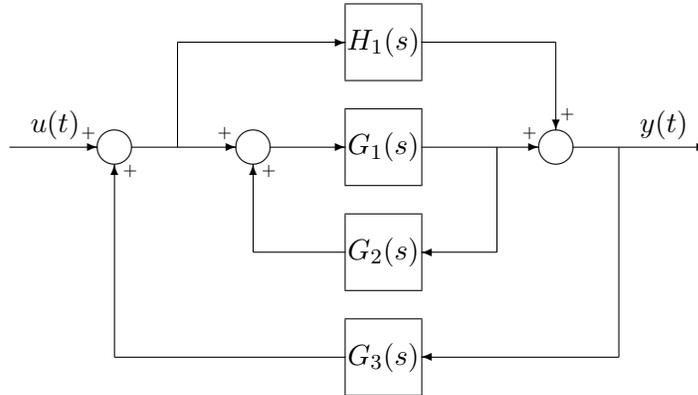


Figura 5.4: Diagrama de bloques de sistema realimentado.

**Ejercicio 5.2.2** (☞☞) Del diagrama de bloques de la Figura 5.4, obtenga la función de transferencia  $G(s) = Y(s)/U(s)$ .

**Desarrollo.** Para resolver este problema, simplificaremos el diagrama de bloques. A partir de lo estudiado en el primer ejemplo de esta sección, se observa que el diagrama de la Figura 5.4 puede ser reducido al diagrama de la Figura 5.5, donde  $G_4(s) = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)}$ .

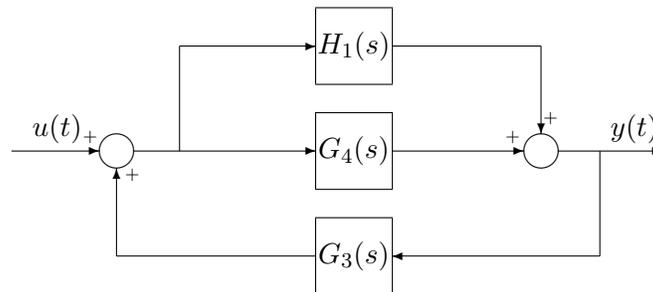


Figura 5.5: Diagrama de bloques simplificado.

Sumando  $H_1(s)$  con  $G_4(s)$ , el diagrama de la Figura 5.5 se reduce al de la Figura 5.6, donde  $G_5(s) = G_4(s) + H_1(s)$ .

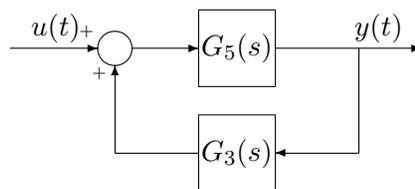


Figura 5.6: Diagrama de bloques simplificado nuevamente.

Por lo tanto, la función de transferencia entre  $u(t)$  e  $y(t)$  es

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} \\
 &= \frac{G_5(s)}{1 - G_5(s)G_3(s)} \\
 &= \frac{G_4(s) + H_1(s)}{1 - [G_4(s) + H_1(s)]G_3(s)} \\
 &= \frac{\frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)} + H_1(s)}{1 - \left[ \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)} + H_1(s) \right] G_3(s)} \\
 &= \frac{G_1(s) + H_1(s)[1 - G_1(s)G_2(s)]}{1 - G_1(s)G_2(s) - [G_1(s) + H_1(s) - H_1(s)G_1(s)G_2(s)] G_3(s)}. \quad \square
 \end{aligned}$$

**Ejercicio 5.2.3** (☞☞) Del siguiente diagrama de bloques, obtenga la función de transferencia  $G(s) = Y(s)/U(s)$ :

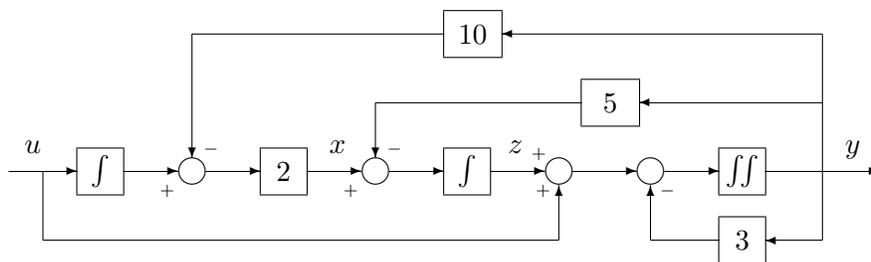


Figura 5.7: Diagrama de bloques de sistema realimentado.

**Desarrollo.** Para el cálculo de la función de transferencia, se considera que la integral es equivalente en frecuencia al factor  $1/s$ . Entonces, se forman las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 X(s) &= \frac{2U(s) - 20sY(s)}{s} \\
 Z(s) &= \frac{X(s) - 5Y(s)}{s} \\
 Y(s) &= \frac{Z(s) + U(s) - 3Y(s)}{s^2}.
 \end{aligned}$$

Combinando estas 3 ecuaciones para eliminar las variables auxiliares  $X(s)$  y  $Z(s)$ , se tiene

$$\begin{aligned}
 (s^2 + 3)Y(s) &= \frac{X(s) - 5Y(s)}{s} + U(s) \\
 \implies [s(s^2 + 3) + 5]Y(s) &= sU(s) + \frac{2U(s) - 20sY(s)}{s} \\
 \implies [s^4 + 3s^2 + 5s + 20]Y(s) &= [s^2 + 2]U(s) \\
 \implies G(s) &= \frac{s^2 + 2}{s^4 + 3s^2 + 5s + 20}. \quad \square
 \end{aligned}$$

### 5.3. Diagramas de Bode

La respuesta en frecuencia  $H(j\omega)$  es una función compleja<sup>1</sup>  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Por ende, no se puede graficar fácilmente  $H(j\omega)$  en función de  $\omega$ . Una solución posible es hacer 2 gráficos:

- $|H(j\omega)|$  v/s  $\omega$ .
- $\angle H(j\omega)$  v/s  $\omega$ .

Para incluir un rango mayor de frecuencias y hacer más fácil el análisis, se grafica en escala logarítmica en  $\omega$  y la magnitud en decibeles, es decir,  $|H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |H(j\omega)|$ .

**Ejercicio 5.3.1** (🐞🐞) *Obtenga las curvas asintóticas y grafique el diagrama de Bode para las siguientes respuestas en frecuencia:*

1.  $H_1(j\omega) = \frac{2}{(j\omega + 1)(\frac{j\omega}{100} + 1)}$
2.  $H_2(j\omega) = \frac{300j\omega}{(j\omega + 0,1)(j\omega + 100)}$
3.  $H_3(j\omega) = \frac{100(j\omega + 1)(j\omega - 1)}{(j\omega)^2 + 8j\omega + 400}$ .

#### Desarrollo.

1. Primero, notamos que la ganancia de Bode es simplemente  $H_1(0) = 2$ . Haciendo un barrido por las frecuencias positivas, el primer polo se encuentra en  $1[\text{rad/s}]$ . Aquí, la magnitud comienza a decrecer a razón de  $20[\text{dB/dec}]$ , y la fase disminuye a  $-90^\circ$ . De similar manera, en la frecuencia  $\omega = 100[\text{rad/s}]$ , la magnitud decrece a una tasa mayor ( $40[\text{dB/dec}]$ ), y la fase llega a  $-90^\circ$ . Las asíntotas son:

$$|H_1(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 20 \log(2) & \text{si } \omega < 1[\text{rad/s}], \\ 20 \log(2) - 20 \log(\frac{\omega}{1}) & \text{si } 1[\text{rad/s}] \leq \omega < 100[\text{rad/s}], \\ 20 \log(2) - 20 \log(\frac{\omega}{1}) - 20 \log(\frac{\omega}{100}) & \text{si } \omega \geq 100[\text{rad/s}] \end{cases}$$

$$\angle H_1(j\omega) \approx \begin{cases} 0^\circ & \text{si } \omega < 1[\text{rad/s}], \\ -90^\circ & \text{si } 1[\text{rad/s}] \leq \omega < 100[\text{rad/s}], \\ -180^\circ & \text{si } \omega \geq 100[\text{rad/s}]. \end{cases}$$

En la Figura 5.8 se muestra el diagrama de Bode real. Note que en la curva exacta de magnitud se puede apreciar una caída de aproximadamente  $-3[\text{dB}]$  con respecto al valor dado por las curvas asintóticas. Esto no es casualidad, como se verá en el ejercicio 5.3.2. Note además que para las asíntotas de fase se ha considerado una versión simplificada. Para curvas más precisas, en los cambios de fase (como  $\omega = 1, 100$  en este caso) se recomienda interpolar linealmente desde una década antes, hasta una década después.

<sup>1</sup>Aquí se considera que la variable dependiente es  $\omega \in \mathbb{R}$ , no  $j\omega$ .

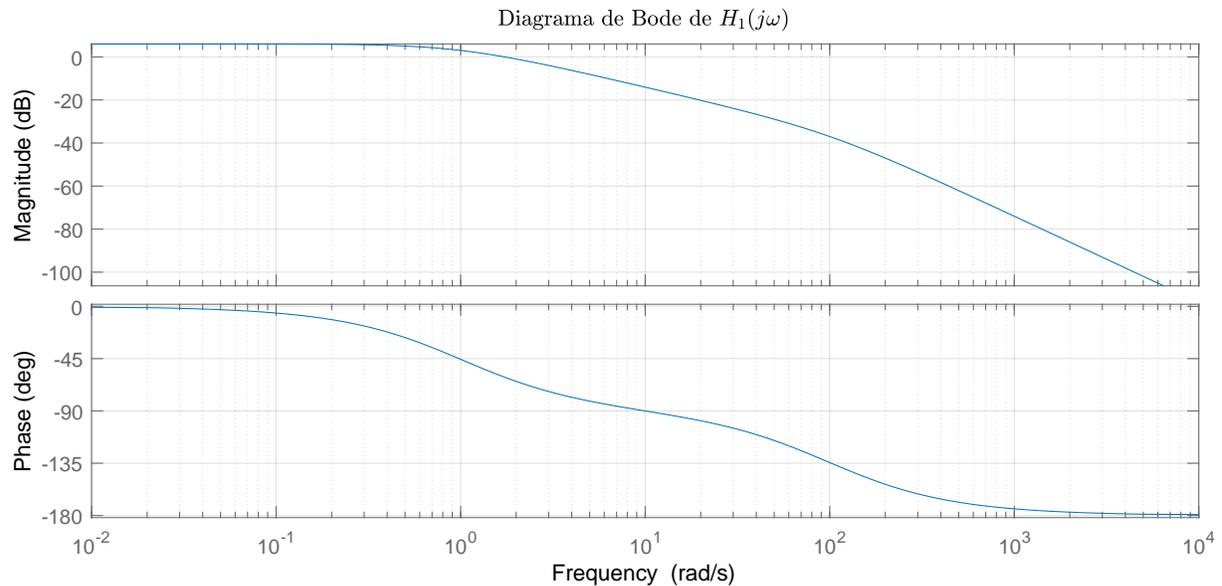


Figura 5.8: Diagrama de Bode de  $H_1(j\omega)$ . Note los cambios de pendiente en  $\omega = 1$ [rad/s], y  $\omega = 100$ [rad/s].

2. A diferencia del primer ejercicio,  $H_2(j\omega)$  tiene un cero en  $\omega = 0$ [rad/s]. Independiente de esto, podemos calcular la ganancia de Bode al calcular  $\lim_{\omega \rightarrow 0} H_2(j\omega)/(j\omega) = 30$ . Por ende, cuando  $\omega \ll 1$ , la curva del diagrama de Bode sube desde magnitud  $-\infty$ [dB] a tasa de  $20$ [dB/dec]. Producto del término  $(j\omega)$ , la fase comienza en  $90^\circ$ . Al cruzar  $\omega = 0,1$ [rad/s], la magnitud se mantiene constante en aproximadamente  $20 \log(0,1) + 20 \log(30)$ , mientras que la fase cae a  $0^\circ$ . Finalmente, el polo en  $100$ [rad/s] produce una caída en magnitud a razón de  $-20$ [dB/dec], y la fase cae a  $-90^\circ$ .

En resumen, las asíntotas son las siguientes:

$$|H_2(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 20 \log(30) + 20 \log(\omega) & \text{si } \omega < 1[\text{rad/s}], \\ 20 \log(30) + 20 \log(0,1) & \text{si } 1[\text{rad/s}] \leq \omega < 100[\text{rad/s}], \\ 20 \log(30) + 20 \log(0,1) - 20 \log(\frac{\omega}{100}) & \text{si } \omega \geq 100[\text{rad/s}] \end{cases}$$

$$\angle H_2(j\omega) \approx \begin{cases} 90^\circ & \text{si } \omega < 1[\text{rad/s}], \\ 0^\circ & \text{si } 1[\text{rad/s}] \leq \omega < 100[\text{rad/s}], \\ -90^\circ & \text{si } \omega \geq 100[\text{rad/s}]. \end{cases}$$

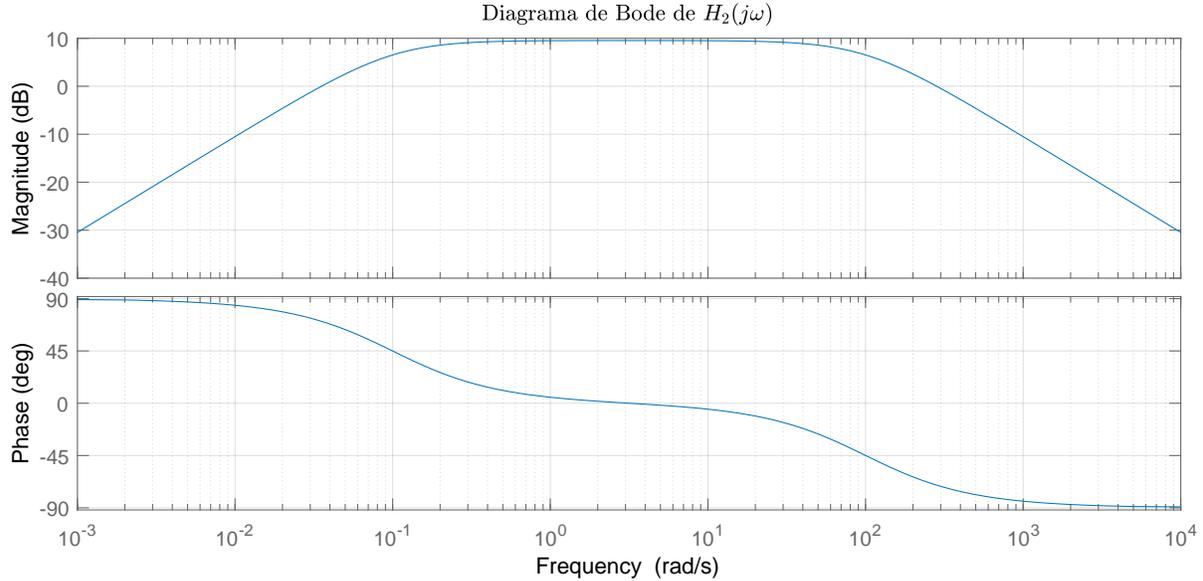


Figura 5.9: Diagrama de Bode de  $H_2(j\omega)$ . Note el valor peak constante ligeramente menor a 10[dB]. El valor obtenido por asíntotas es 9,54[dB], mientras que el valor peak exacto es 9,53[dB].

3. Primero, escribimos  $H_3(j\omega)$  como

$$H_3(j\omega) = \frac{0,25(j\omega + 1)(j\omega - 1)}{\left(\frac{j\omega}{20}\right)^2 + 2 \cdot 0,2 \left(\frac{j\omega}{20}\right) + 1},$$

donde se identifica que la ganancia de Bode es  $-0,25$ . Esto implica que el diagrama de magnitud comienza en  $20 \log(0,25)$ [dB], y el diagrama de fase<sup>2</sup> parte en  $-180^\circ$ . Luego, el par de ceros en  $\omega = 1$ [rad/s] provoca un aumento de magnitud de  $40$ [dB/dec], mientras que la fase se mantiene constante, pues la fase entregada por el cero de fase mínima se cancela con la del cero de fase no mínima. Finalmente, el par de polos complejos conjugados comienza a hacer efecto en  $\omega = 20$ [rad/s], dejando constante la magnitud en  $20 \log(0,25) + 40 \log(20)$ , y la fase en  $-360^\circ$  (o  $0^\circ$ ).

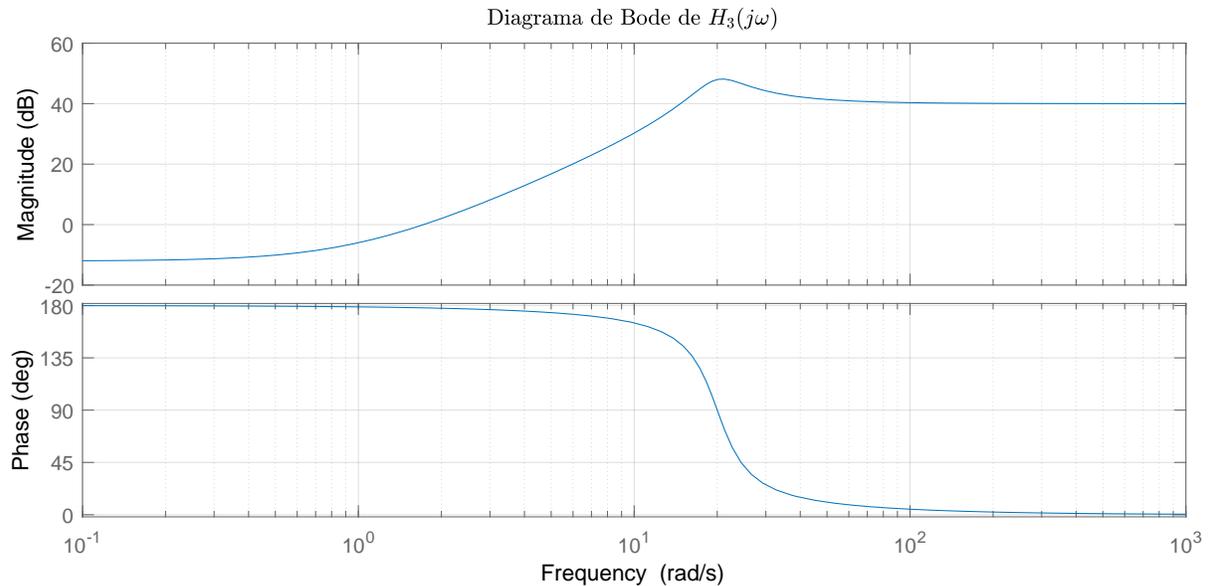
Las asíntotas son:

$$|H_3(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 20 \log(0,25) & \text{si } \omega < 1[\text{rad/s}], \\ 20 \log(0,25) + 40 \log(\omega) & \text{si } 1[\text{rad/s}] \leq \omega < 200[\text{rad/s}], \\ 20 \log(0,25) + 40 \log(20) & \text{si } \omega \geq 200[\text{rad/s}] \end{cases},$$

$$\angle H_2(j\omega) \approx \begin{cases} -180^\circ & \text{si } \omega < 200[\text{rad/s}], \\ -360^\circ & \text{si } \omega \geq 200[\text{rad/s}]. \end{cases}$$

En la Figura 5.10 se muestra el diagrama de Bode exacto. Un detalle no descrito en el análisis asintótico es el peak en  $\omega = 20$ [rad/s]. Éste se debe a que el factor de amortiguamiento es relativamente bajo ( $\xi = 0,2$ ).

<sup>2</sup>Los diagramas de fase son invariantes a incrementos de  $360^\circ$ . Por este motivo, un ángulo de  $-180^\circ$  es equivalente a uno de  $180^\circ$ .

Figura 5.10: Diagrama de Bode de  $H_3(j\omega)$ .

**Nota:** Las tres respuestas en frecuencia anteriormente representadas no fueron escogidas por casualidad. Viendo éstas como filtros, la primera corresponde a un filtro *pasa-bajos*, pues acentúa las bajas frecuencias y atenúa las altas. La tercera respuesta en frecuencia es un filtro *pasa-altos*, y tiene la misma interpretación que un *pasa-bajos*, mientras que la segunda es un filtro *pasa-banda*. Tal como su nombre lo indica, los filtros *pasa-banda* amplifican sólo un determinado rango de frecuencias, y atenúan el resto.  $\square$

**Ejercicio 5.3.2** ( $\blacksquare$ ) Considere la respuesta en frecuencia

$$H(j\omega) = \frac{10}{j\omega + 10}. \quad (5.9)$$

Obtenga las curvas asintóticas del diagrama de Bode de magnitud, y compare el valor de  $|H(j10)|_{\text{dB}}$  exacto con el obtenido por el análisis asintótico.

**Desarrollo.** En primer lugar, la ganancia de Bode es  $H(0) = 1$ , por ende la primera asíntota del diagrama de magnitud es  $|H(j\omega)|_{\text{dB}} = 0$ . Después, para  $\omega \geq 10$  [rad/s] se tiene la asíntota  $|H(j\omega)|_{\text{dB}} = 20 \log\left(\frac{\omega}{10}\right)$ . De todas formas, es claro que el análisis asintótico señala que  $|H(j\omega)|_{\text{dB}} = 0$ .

Ahora, obtengamos el valor exacto. Para esto, evaluamos

$$|H(j10)| = \frac{10}{\sqrt{10^2 + 10^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

En decibeles,

$$|H(j10)|_{\text{dB}} = 20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -10 \log(2) \approx -3.$$

Es decir, el valor exacto se encuentra aproximadamente 3 [dB] más bajo que el valor obtenido por asíntotas.

**Nota:** Este resultado es bastante ocupado en el análisis asintótico para hacer más preciso el diagrama en las frecuencias asociadas a polos o ceros. Este ejercicio muestra que el ajuste de 3[dB] está bien justificado teóricamente.  $\square$

**Ejercicio 5.3.3** (☛☛) Dado el diagrama de Bode de la figura 5.11, proponga una respuesta en frecuencia  $H(j\omega)$  que pueda ser representada aproximadamente por él.

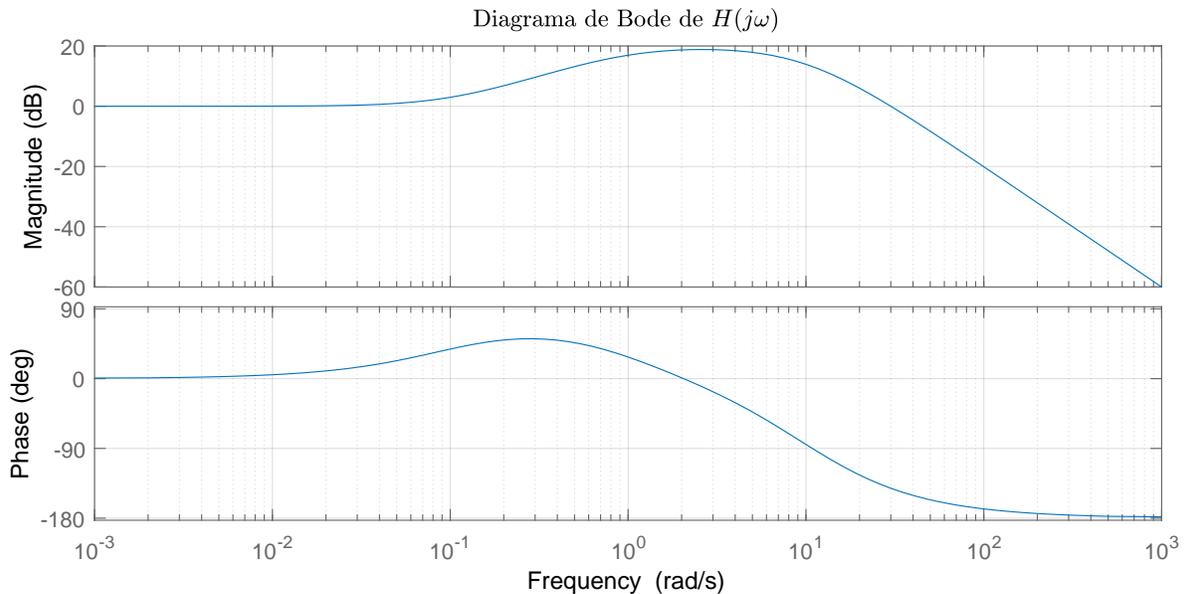


Figura 5.11: Diagrama de Bode de  $H(j\omega)$ .

**Desarrollo.** De la figura 5.11, podemos hacer las siguientes deducciones:

- La ganancia a continua es 0[dB]. Dado que en frecuencia cero el desfase es cero, debe tenerse  $H(0) = 1$ .
- En aproximadamente  $\omega = 10^{-1}$ , el diagrama de magnitud comienza a crecer a razón de 20[dB/dec]. Esto es indicio de un cero en  $\omega = 10^{-1}$ . Dado que en el diagrama de fase se observa un aumento de fase, este cero debe corresponder a un cero de fase mínima, de la forma  $(10j\omega + 1)$ .
- En aproximadamente  $\omega = 1$ , el diagrama de magnitud se estaciona en un valor máximo, cercano a 20[dB]. Es decir, se debe tener un polo cercano a  $\omega = 1$ , tal que la pendiente del gráfico de magnitud sea 0[dB/dec]. Dado que en el diagrama de fase se observa una disminución de fase, este polo debe corresponder a un polo estable de la forma  $(j\omega + 1)$ .
- A partir de aproximadamente  $\omega = 10$ , en el gráfico de magnitud se aprecia una pendiente de -40[dB/dec], sin un peak visible en esta frecuencia. Esto es indicio de un polo doble en  $\omega = 10$ . Dado que en el diagrama de fase se observa una disminución de 180°, estos polos son estables, de la forma  $\left(\frac{j\omega}{10} + 1\right)^2$ .

En conclusión,  $H(j\omega)$  es aproximadamente

$$H(j\omega) = \frac{10j\omega + 1}{(j\omega + 1) \left(\frac{j\omega}{10} + 1\right)^2}. \quad \square$$

## 5.4. Diagramas de Nyquist

El diagrama de Bode es una forma de representar  $H(j\omega)$  a partir de gráficos separados de magnitud y fase en función de la frecuencia  $\omega$ . Otra forma de representar  $H(j\omega)$  es a través del diagrama de Nyquist, el cual consiste en graficar punto a punto para cada  $\omega \geq 0$  la respuesta en frecuencia en el plano complejo. Esto entrega una curva parametrizada en  $\omega$ , donde

- $|H(j\omega)|$ : Distancia al origen.
- $\angle H(j\omega)$ : Ángulo contrarreloj con respecto al eje real positivo.

La forma más fácil de dibujar el diagrama de Nyquist es dibujar el diagrama de Bode y con éste, graficar puntos relevantes y completar.

**Ejercicio 5.4.1** (👉) *Obtenga el diagrama de Nyquist de la respuesta en frecuencia representada por el diagrama de Bode de la Figura 5.12.*

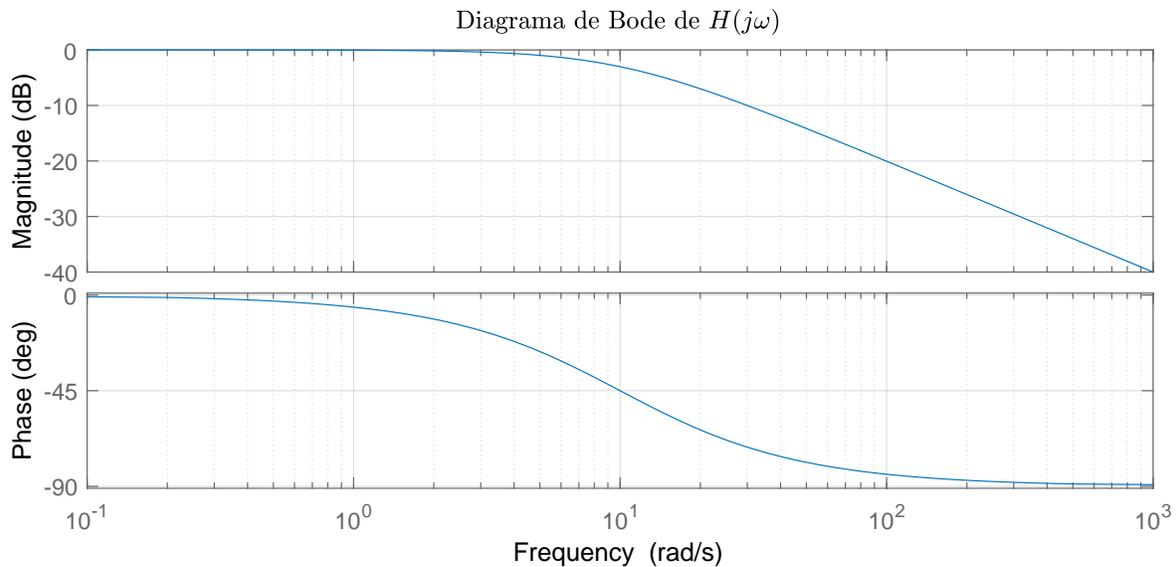


Figura 5.12: Diagrama de Bode de  $H(j\omega)$ .

**Desarrollo.** Dado que  $|H(0)|_{\text{dB}} = 0[\text{dB}]$ , y  $\angle H(0) = 0^\circ$ , el punto inicial  $H(0)$  se ubica en  $(1, 0)$ . A medida que  $\omega$  aumenta, la curva de Nyquist debe lentamente acercarse al origen (dado que la magnitud está decayendo), mientras que la fase (es decir, el ángulo con respecto al eje real) también decrece desde  $0^\circ$  a  $-90^\circ$ . Finalmente, para  $\omega \rightarrow \infty$ , la curva de Nyquist debe alcanzar el origen proviniendo desde el ángulo  $-90^\circ$ .

El análisis anterior implica que el diagrama de Nyquist debe ser una media luna en el cuarto cuadrante, como la que se muestra en la Figura 5.13.

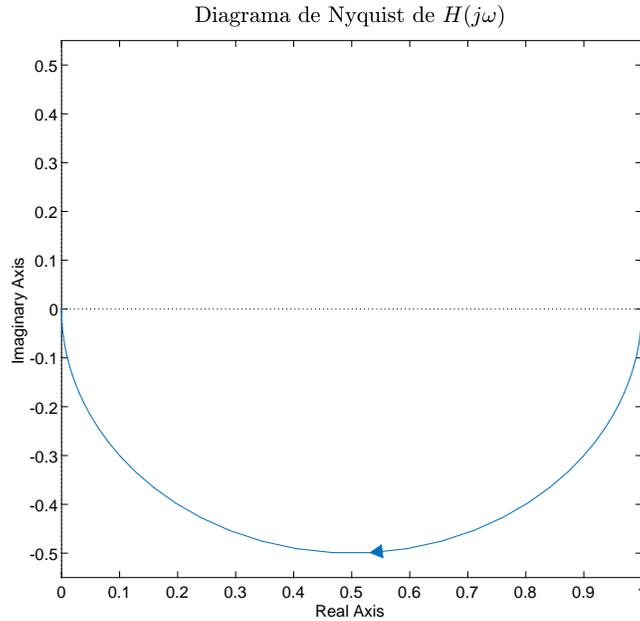


Figura 5.13: Diagrama de Nyquist de  $H(j\omega)$ .

**Nota:** Para este caso sencillo, es posible obtener la ecuación de la curva explícitamente: A partir del diagrama de Bode, se puede obtener que la respuesta en frecuencia representada es

$$H(j\omega) = \frac{10}{j\omega + 10} = \underbrace{\frac{100}{100 + \omega^2}}_{\text{Re}\{H(j\omega)\}} + j \underbrace{\frac{-10\omega}{100 + \omega^2}}_{\text{Im}\{H(j\omega)\}},$$

con lo cual calculamos

$$\begin{aligned} (\text{Re}\{H(j\omega)\} - 0,5)^2 + (\text{Im}\{H(j\omega)\})^2 &= \left(\frac{50 - \frac{\omega^2}{2}}{100 + \omega^2}\right)^2 + \left(\frac{-10\omega}{100 + \omega^2}\right)^2 \\ &= \frac{\frac{\omega^4}{4} + 50\omega^2 + 2500}{(100 + \omega^2)^2} \\ &= 0,5^2. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Es decir, la curva de Nyquist es la mitad inferior de la circunferencia  $(\text{Re}\{H(j\omega)\} - 0,5)^2 + (\text{Im}\{H(j\omega)\})^2 = 0,5^2$ .  $\square$

**Ejercicio 5.4.2** (☞☞☞) *Obtenga el diagrama de Bode de*

$$H(j\omega) = \frac{5(j\omega - 0,1)}{(j\omega)(j\omega + 5)}. \tag{5.11}$$

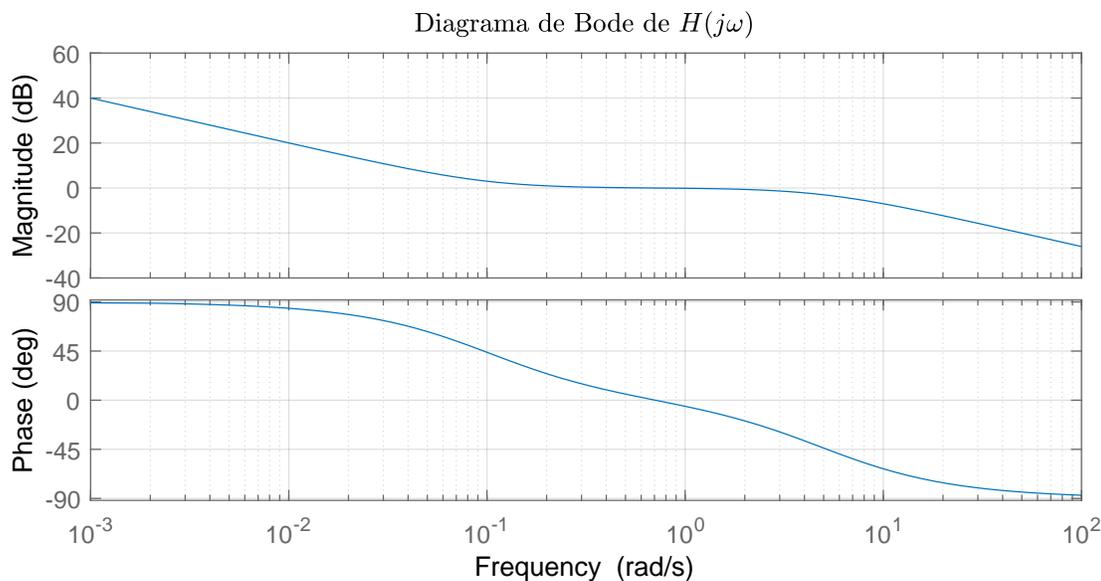
*Con este diagrama, obtenga una curva aproximada del diagrama de Nyquist.*

**Desarrollo.** La respuesta en frecuencia  $H(j\omega)$  tiene un polo en  $\omega = 0$  [rad/s]. Entonces, calculamos la ganancia de Bode como  $\lim_{\omega \rightarrow 0} (j\omega)H(j\omega) = -0,1$ . Por ende, cuando  $\omega \ll 1$ , la curva del diagrama de Bode baja desde magnitud  $\infty$  [dB] a tasa de  $-20$  [dB/dec]. Producto del término  $(j\omega)$  y la negatividad de la ganancia de Bode, la fase comienza en  $-270^\circ = 90^\circ$ . Al cruzar  $\omega = 0,1$  [rad/s], la magnitud se mantiene constante en aproximadamente  $0$  [dB], mientras que la fase cae a  $0^\circ$ . Finalmente, el polo estable en  $5$  [rad/s] produce una caída en magnitud a razón de  $-20$  [dB/dec], y la fase cae a  $-90^\circ$ .

En resumen, las asíntotas son las siguientes:

$$|H(j\omega)|_{\text{dB}} \approx \begin{cases} 20 \log(0,1) - 20 \log(\omega) & \text{si } \omega < 0,1 \text{ [rad/s]}, \\ 0 & \text{si } 0,1 \text{ [rad/s]} \leq \omega < 5 \text{ [rad/s]}, \\ -20 \log\left(\frac{\omega}{5}\right) & \text{si } \omega \geq 5 \text{ [rad/s]} \end{cases}$$

$$\angle H(j\omega) \approx \begin{cases} 90^\circ & \text{si } \omega < 0,1 \text{ [rad/s]}, \\ 0^\circ & \text{si } 0,1 \text{ [rad/s]} \leq \omega < 5 \text{ [rad/s]}, \\ -90^\circ & \text{si } \omega \geq 5 \text{ [rad/s]}. \end{cases}$$

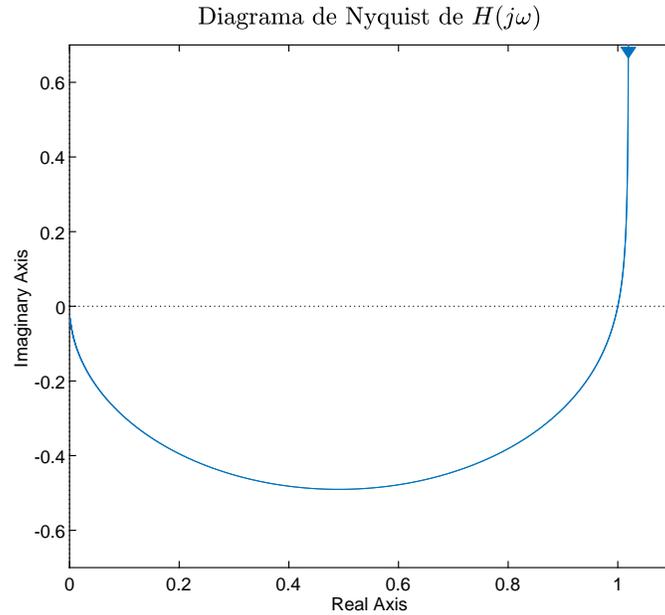


Dado el diagrama de Bode, notamos que el diagrama de Nyquist parte desde el infinito, en el primer cuadrante. Como la fase comienza en  $90^\circ$ , la parte imaginaria de  $H(j\omega)$  es aquella que no es acotada. Segundo, vemos que la curva de Nyquist cruza el eje real con distancia al origen  $0$  [dB] = 1. Además, luego de este valor observamos que la magnitud decae a cero mientras que la fase se aproxima a  $-90^\circ$ , que corresponde al eje imaginario.

Un último detalle a precisar: La curva cuando  $\omega$  es muy pequeño debe tener parte real cercana a 1. Esto se concluye al notar que

$$H(j\omega) = \frac{-0,1}{j\omega} + \frac{5,1}{j\omega + 5}, \quad (5.12)$$

y por ende, para  $\omega \ll 1$ , el segundo término de la parte derecha de (5.12) es cercano a 1.  $\square$



**Ejercicio 5.4.3** (👨👩) *El diagrama de Nyquist de*

$$G(j\omega) = \frac{10j\omega + 1}{(j\omega + 1) \left(\frac{j\omega}{10} + 1\right)^2}$$

*se encuentra en la figura 5.14. Si se excita el sistema con  $u(t) = 2 \cos(4t + \frac{\pi}{3})$ , determine  $y(t)$  en estado estacionario, y compare con el resultado obtenido de forma gráfica gracias al diagrama de Nyquist.*

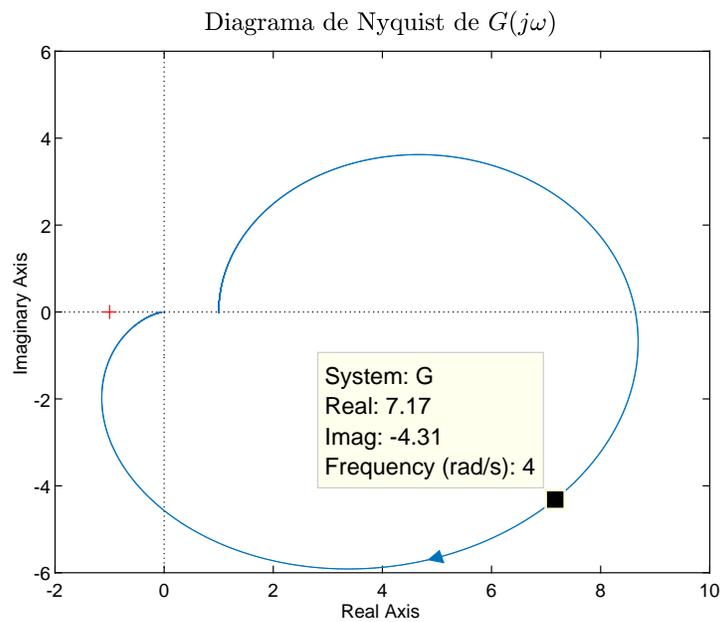


Figura 5.14: Diagrama de Nyquist de  $G(j\omega)$ .

**Desarrollo.** La ganancia y el desfase dados por  $G(j\omega)$  son:

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\frac{1 + 100\omega^2}{(\omega^2 + 1) \left(\frac{\omega^2}{100} + 1\right)^2}}, \quad \angle G(j\omega) = \arctan(10\omega) - \arctan(\omega) - 2 \arctan\left(\frac{\omega}{10}\right).$$

Evalutando en  $\omega = 4$ , se tiene

$$|G(j4)| = 8,37, \quad \angle G(j4) = -0,54.$$

De esta forma, se tiene que la salida  $y(t)$  en estado estacionario corresponde a

$$\begin{aligned} y(t) &= 2 \cdot |G(j4)| \cos\left(4t + \frac{\pi}{3} + \angle G(j4)\right) \\ &= 2 \cdot 8,37 \cos\left(4t + \frac{\pi}{3} - 0,54\right). \end{aligned}$$

Ahora, ocupando el diagrama de Nyquist dado, se sabe por inspección que  $\text{Re}\{G(j4)\} = 7,17$ , e  $\text{Im}\{G(j4)\} = -4,31$ . Entonces,

$$\begin{aligned} |G(j4)| &= \sqrt{\text{Re}\{G(j4)\}^2 + \text{Im}\{G(j4)\}^2} = 8,37 \\ \angle G(j4) &= \arctan\left(\frac{\text{Im}\{G(j4)\}}{\text{Re}\{G(j4)\}}\right) = -0,54. \end{aligned}$$

Con estos valores, se obtiene la misma señal  $y(t)$  antes calculada con el método analítico, tal como debe ser. Claramente el método ocupando el diagrama de Nyquist es más fácil.

**Nota:** Si se observa el diagrama de Bode de este mismo sistema en la Figura 5.11, es posible obtener las mismas conclusiones, haciendo el cambio desde dB a magnitud absoluta.  $\square$

# Capítulo 6

## Sistemas Híbridos

Señales de sistemas físicos son señales de tiempo continuo. Sin embargo, para procesar esta información generalmente se usa tecnología digital. La interacción entre componentes tanto de tiempo continuo como de tiempo discreto se estudia en este capítulo.

Primero, analizaremos cómo muestrear señales analógicas, y si es posible reconstruir aquella señal utilizando sólo información en tiempo discreto. Finalmente, estudiaremos (con poco detalle) la noción de *sistema equivalente de tiempo discreto*.

### 6.1. Muestreo y reconstrucción de señales

El muestreo incorrecto de señales analógicas puede provocar que señales de alta frecuencia se tornen indistinguibles con señales de baja frecuencia. Este efecto se denomina *aliasing o doblaje en frecuencia*. Para evitar esto, se debe muestrear la señal analógica a más del doble de la frecuencia máxima de su espectro (o *frecuencia de Nyquist*).

El espectro de una señal muestreada con un periodo  $\Delta$ , corresponde a la suma, escalada por  $1/\Delta$ , del espectro de la señal de tiempo continua y de ese mismo espectro desplazado en múltiplos de la frecuencia de muestreo  $\omega_m = 2\pi/\Delta$ .

Para obtener reconstrucción perfecta, debe cumplirse

1. La señal de tiempo continuo debe tener energía sólo en una banda limitada, con frecuencia máxima  $\omega_c$  donde  $|F(j\omega)| = 0$  para  $\omega \geq \omega_c$ .
2. La frecuencia de muestreo debe ser mayor que  $2\omega_c$ .
3. Para reconstruir, aplicar filtro pasabajos ideal para eliminar espectros repetidos en altas frecuencias y normalizar por  $\Delta$ .

En la práctica, la reconstrucción se realiza tomando en cuenta el ancho de banda  $\omega_c$  de la señal por reconstruir. Un criterio usual para diseñar la frecuencia de muestreo  $\omega_m$  es considerar  $\omega_m$  entre 5 a 10 veces mayor que el ancho de banda del sistema, pues con esta elección la información perdida en alta frecuencia es insignificante.

**Ejercicio 6.1.1** (♣) *Considere el esquema dado en la figura 6.1. Si  $G_1(s) = 1/(s + a)$  con  $a > 0$ , ¿a qué tasa se debe muestrear la señal  $y(t)$  para poder obtener un equivalente discreto apropiado de  $G_1(s)$ ?*

**Desarrollo.** Notemos en primer lugar que el ancho de banda del sistema  $G_1(s)$  está dado por  $\omega_c = a[\text{rad/s}]$ . Para decidir la tasa de muestreo, se recurre al criterio mencionado en la sección 6.1:

$$5\omega_c \leq \frac{2\pi}{\Delta} \leq 10\omega_c$$

$$\frac{\pi}{5a} \leq \Delta \leq \frac{2\pi}{5a}.$$

**Nota:** Existen otros criterios para elegir la tasa de muestreo. Otro criterio común [7] se deduce a partir de la respuesta a escalón del sistema en el dominio del tiempo. La idea es considerar entre 4 a 10 muestras durante el tiempo de levantamiento  $t_L$ . Esto conduce al criterio

$$\frac{t_L}{10} \leq \Delta \leq \frac{t_L}{4}.$$

Para este caso, al considerar el tiempo de levantamiento como  $4/a$ , se tiene el criterio

$$\frac{2}{5a} \leq \Delta \leq \frac{1}{a},$$

el cual se asemeja bastante al criterio de ancho de banda obtenido anteriormente.  $\square$

**Ejercicio 6.1.2** (☛☛☛) *Considere la señal*

$$f(t) = \frac{2[1 - \cos(t)]}{\pi t^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

*Determine su espectro, y una tasa de muestreo apropiada para muestrear esta señal. ¿Puede conseguirse reconstrucción perfecta?*

**Ayuda:** *Considere  $F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ , la cual se supone bien definida. Si la transformada de Fourier  $\tilde{F}(j\omega) = \mathcal{F}\{t^2 f(t)\}$  está bien definida, entonces  $F(j\omega)$  satisface*

$$\frac{d^2 F(j\omega)}{d\omega^2} = -\tilde{F}(j\omega). \quad (6.1)$$

**Desarrollo.** Lo más difícil en este ejercicio es determinar el espectro. Para ello, primero hacemos un cálculo auxiliar:

$$\mathcal{F}\{t^2 f(t)\} = \frac{2}{\pi} \mathcal{F}\{1\} - \frac{2}{\pi} \mathcal{F}\{\cos(t)\} = 4\delta(\omega) - 2\delta(\omega - 1) - 2\delta(\omega + 1).$$

Ahora, acudimos a la propiedad en (6.1) para obtener<sup>1</sup>

$$\frac{d^2 F(j\omega)}{d\omega^2} = -4\delta(\omega) + 2\delta(\omega - 1) + 2\delta(\omega + 1)$$

$$\implies F(j\omega) = -4r(\omega) + 2r(\omega - 1) + 2r(\omega + 1)$$

donde  $r(\cdot)$  es la función rampa unitaria. En otras palabras,

$$F(j\omega) = \begin{cases} 2(1 - |\omega|) & \text{si } |\omega| \leq 1, \\ 0 & \text{si } |\omega| > 1. \end{cases}$$

Esto implica que cualquier frecuencia de muestreo mayor que  $2\omega_c = 2[\text{rad/s}] = 4\pi[\text{Hz}]$  es apropiada para esta señal. Para estas frecuencias de muestreo, es posible conseguir reconstrucción perfecta.  $\square$

<sup>1</sup>Al aplicar antiderivada, se debe tener en cuenta posibles constantes en la solución final. Sin embargo, al calcular la transformada inversa a lo obtenido puede comprobarse que el resultado está correcto.

## 6.2. Discretización de sistemas de tiempo continuo

En lo estudiado en esta sección, la idea principal utilizada en la discretización de sistemas de tiempo continuo es la equivalencia entre *respuestas a escalón*. Es decir, se busca aquel modelo de tiempo discreto que consigue una respuesta a escalón igual a la respuesta a escalón del sistema de tiempo continuo en los instantes de muestreo.

Para el análisis, se supone que la señal de entrada al sistema de tiempo continuo se forma a partir de la retención de valores discretos dados por la señal de tiempo discreto  $u_d[k]$ . Esta retención la proporciona el *retenedor de orden cero*<sup>2</sup> o *ZOH*, por sus siglas en inglés.

El diagrama de bloques que representa esta situación se encuentra en la Figura 6.1.

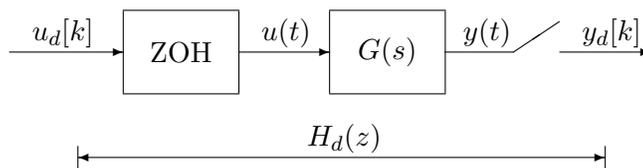


Figura 6.1: Discretización de modelo continuo a partir de un retenedor de orden cero.

La relación entre las secuencias de entrada  $u_d[k]$  e  $y_d[k]$  está dada por

$$Y_d(z) = H_d(z)U_d(z),$$

donde  $U_d(z) = \mathcal{Z}\{u_d[k]\}$ ,  $Y_d(z) = \mathcal{Z}\{y_d[k]\}$  y la función de transferencia  $H_d(z)$  está dada por

$$H_d(z) = \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{G(s)}{s} \right\} \Big|_{t=k\Delta} \right\}. \quad (6.2)$$

En variables de estado, a partir de las matrices de variables de estado continuas ( $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}$ ) se obtienen las matrices del modelo de estado en tiempo discreto como<sup>3</sup>

$$\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}\Delta}, \quad \mathbf{B}_d = \int_0^{\Delta} e^{\mathbf{A}\eta} \mathbf{B} d\eta, \quad \mathbf{C}_d = \mathbf{C}, \quad \mathbf{D}_d = \mathbf{D}.$$

**Ejercicio 6.2.1** (☛☛☛) Considere el siguiente sistema de tiempo continuo

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)}.$$

Dado el periodo de muestreo  $\Delta = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{5}{4}\right)$ , obtenga el equivalente con retenedor de orden cero de  $G(s)$ ,  $H_d(z)$ . Posteriormente, obtenga la representación en variables de estado de  $H_d(z)$  a partir de la representación en variables de estado de  $G(s)$ . Finalmente, muestre que ambas representaciones del equivalente en tiempo discreto son equivalentes.

<sup>2</sup>Existen otros tipos de retenedores (como el de orden uno, o splines), pero aquí solo se estudia el retenedor de orden cero.

<sup>3</sup>Aquí se debe calcular la exponencial de una matriz. Formas de calcular esta expresión se encuentran en el Apéndice 7.3.6 de este apunte.

**Desarrollo.** Aplicando la fórmula (6.2), se tiene

$$\begin{aligned}
H_d(z) &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{4}{s^2(s+2)} \right\} \Big|_{t=k\Delta} \right\} \\
&= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{1}{s+2} \right\} \Big|_{t=k\Delta} \right\} \\
&= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ (-1 + 2t + e^{-2t}) \mu(t) \Big|_{t=k\Delta} \right\} \\
&= \frac{z-1}{z} \left( \frac{-z}{z-1} + \frac{2\Delta z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-e^{-2\Delta}} \right) \\
&= \frac{z \left[ \ln\left(\frac{5}{4}\right) - \frac{1}{5} \right] + \frac{1}{5} - \frac{4}{5} \ln\left(\frac{5}{4}\right)}{(z-1)(z-0,8)}. \tag{6.3}
\end{aligned}$$

Ahora, siguiendo los pasos estándares vistos en la sección 5.1, obtenemos la siguiente representación en variables de estado para  $G(s)$ :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix} u(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t).
\end{aligned}$$

Para calcular  $\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}\Delta}$ , vemos que

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^4 = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}$$

y por ende se puede demostrar por inducción que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 0 & (-2)^{n-1} \\ 0 & (-2)^n \end{bmatrix}.$$

Con este cálculo, determinamos  $\mathbf{A}_d = e^{\mathbf{A}\Delta}$  por su expansión en serie:

$$\mathbf{A}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta^n}{n!} \begin{bmatrix} 0 & (-2)^{n-1} \\ 0 & (-2)^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta^n}{n!} (-2)^{n-1} \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Delta^n}{n!} (-2)^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1-e^{-2\Delta}}{2} \\ 0 & e^{-2\Delta} \end{bmatrix}.$$

Por otro lado, obtenemos  $\mathbf{B}_d$  resolviendo

$$\mathbf{B}_d = \int_0^{\Delta} \begin{bmatrix} 2(1 - e^{-2\eta}) \\ 4e^{-2\eta} \end{bmatrix} d\eta = \begin{bmatrix} 2\Delta + e^{-2\Delta} - 1 \\ 2 - 2e^{-2\Delta} \end{bmatrix}.$$

Estas son las únicas matrices que se requieren, pues se sabe que  $\mathbf{C}_d = \mathbf{C}$ , y  $\mathbf{D}_d = \mathbf{D}$ . Finalmente,

comprobamos que la representación de estado es equivalente al  $H_d(z)$  obtenido en (6.3) al notar

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_d(z\mathbf{I} - \mathbf{A}_d)^{-1}\mathbf{B}_d + \mathbf{D}_d &= [1 \quad 0] \begin{bmatrix} z-1 & -\frac{1-e^{-2\Delta}}{2} \\ 0 & z-e^{-2\Delta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2\Delta + e^{-2\Delta} - 1 \\ 2 - 2e^{-2\Delta} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(z-1)(z-e^{-2\Delta})} \begin{bmatrix} z-e^{-2\Delta} & \frac{1-e^{-2\Delta}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\Delta + e^{-2\Delta} - 1 \\ 2 - 2e^{-2\Delta} \end{bmatrix} \\ &= \frac{z(2\Delta + e^{-\Delta} - 1) + (1 - e^{-2\Delta} - 2\Delta e^{-2\Delta})}{(z-1)(z-0,8)} \\ &= \frac{z \left[ \ln\left(\frac{5}{4}\right) - \frac{1}{5} \right] + \frac{1}{5} - \frac{4}{5} \ln\left(\frac{5}{4}\right)}{(z-1)(z-0,8)} \end{aligned}$$

lo cual coincide con lo calculado en (6.3).  $\square$

**Ejercicio 6.2.2** (☛☛☛) *Obtenga el equivalente con retentor de orden cero del sistema*

$$G(s) = \frac{3(s-2)}{(s+1)(s+3)},$$

con  $\Delta = 0,1$  y  $\Delta = 1$ . ¿Cuál de los dos períodos de muestreo es mejor para este caso?

**Desarrollo.** Nuevamente aplicando la fórmula (6.2), se tiene

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-2}{s} + \frac{\frac{9}{2}}{s+1} - \frac{\frac{5}{2}}{s+3} \right\} \Big|_{t=k\Delta} \right\} \\ &= \frac{z-1}{z} \mathcal{Z} \left\{ \left( -2 + \frac{9}{2}e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-3t} \right) \mu(t) \Big|_{t=k\Delta} \right\} \\ &= \frac{z-1}{z} \left( \frac{-2z}{z-1} + \frac{\frac{9}{2}z}{z-e^{-\Delta}} - \frac{\frac{5}{2}z}{z-e^{-3\Delta}} \right) \\ &= \frac{z \left( \frac{9}{2}e^{-\Delta} - \frac{5}{2}e^{-3\Delta} - 2 \right) - \frac{5}{2}e^{-\Delta} + \frac{9}{2}e^{-3\Delta} - 2e^{-4\Delta}}{(z-e^{-\Delta})(z-e^{-3\Delta})}. \end{aligned}$$

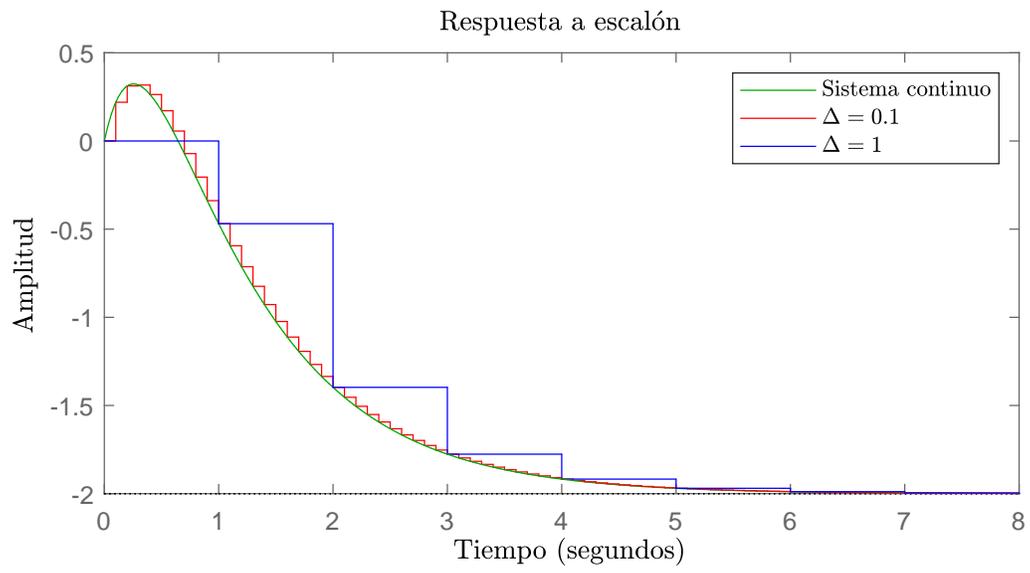
Note que  $G(0) = H(1)$ , tal como corresponde. Evaluando para los  $\Delta$  pedidos, se tiene

$$H_{0,1}(z) = \frac{0,219z - 0,269}{(z - 0,905)(z - 0,741)}, \quad H_1(z) = \frac{-0,469z - 0,7323}{(z - 0,368)(z - 0,049)}.$$

Para decidir qué período de muestreo es más adecuado, determinamos el rango de período de muestreo de acuerdo al criterio mencionado anteriormente. Considerando la frecuencia del polo más rápido como el ancho de banda del sistema, se tiene  $\omega_c = 3$ [rad/s] y por ende

$$5\omega_c \leq \frac{2\pi}{\Delta} \leq 10\omega_c \implies 0,209 \leq \Delta \leq 0,419.$$

Pese a no estar dentro del rango sugerido por el criterio, es preferible ocupar  $\Delta = 0,1$  pues con  $\Delta = 1$  no se puede asegurar una buena reconstrucción dado que la frecuencia de muestreo  $\omega_m = 2\pi$  es demasiado cercana al ancho de banda del sistema. Esto lo podemos observar comparando las respuestas a escalón para distintos valores de  $\Delta$ .  $\square$



# Capítulo 7

## Apéndice

En esta sección se repasan muy brevemente algunas herramientas matemáticas que son de utilidad para entender los contenidos de este apunte.

### 7.1. Números complejos

Un número complejo es un número que puede ser expresado de la forma  $z = a + bj$ , donde  $j \triangleq \sqrt{-1}$  y  $a, b$  son números reales. El número  $a$  es la parte real de  $z$ , mientras que  $b$  es la parte imaginaria de  $z$ . Si  $z = a + bj$ , entonces  $a - bj$  es el número complejo conjugado de  $z$ , denotado como  $\bar{z}$ . Si  $z_1 = a_1 + b_1j$  y  $z_2 = a_2 + b_2j$ , entonces las siguientes igualdades se satisfacen:

$$\begin{aligned}z_1 + z_2 &= (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)j \\z_1 - z_2 &= (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)j \\z_1 z_2 &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)j \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{(b_1 a_2 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2} j.\end{aligned}$$

Recuerde que dos números complejos son iguales si y sólo si ambas partes reales e imaginarias coinciden.

Además de representar un número complejo con su forma cartesiana como lo visto arriba, también se puede escribir por su *forma polar*. Si interpretamos el número complejo  $z = a + bj$  como el punto  $(a, b)$  del plano complejo, introducimos las coordenadas polares  $(r, \phi)$ , donde

$$a = r \cos(\phi), \quad b = r \sin(\phi).$$

Así, escribimos

$$z = r[\cos(\phi) + j \sin(\phi)]. \tag{7.1}$$

Como  $z$  es un número complejo arbitrario, en particular se tendrá que para todo  $x \in \mathbb{C}$  existen  $r$  y  $\phi$  que satisfacen

$$e^{jx} = r[\cos(\phi) + j \sin(\phi)]. \tag{7.2}$$

Tomando derivada a ambos lados con respecto a  $x$ , y reemplazando  $e^{jx}$  tenemos

$$jr[\cos(\phi) + j \sin(\phi)] = [\cos(\phi) + j \sin(\phi)] \frac{dr}{dx} + r[-\sin(\phi) + j \cos(\phi)] \frac{d\phi}{dx}.$$

Comparando partes reales e imaginarias, deducimos que  $dr/dx = 0$  y  $d\phi/dx = 1$ . Como  $r = 1$  y  $\phi = 0$  cuando  $x = 0$  gracias a que  $e^{j0} = 0$ , se tiene que  $r = 1$  y  $\phi = x$ . Reemplazando en (7.2) hemos probado la identidad de Euler

$$e^{j\phi} = \cos(\phi) + j \sin(\phi). \quad (7.3)$$

Gracias a esta fórmula, podemos escribir (7.1) de forma más compacta como

$$z = r e^{j\phi}.$$

Aquí,  $r$  representa la magnitud del número complejo, y  $\phi$  es la fase. La magnitud se calcula como  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ , mientras que la fase se calcula con una fórmula más complicada<sup>1</sup>:

$$\phi = \arctan2(b, a) \triangleq \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{si } a > 0, \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi & \text{si } a < 0 \text{ y } b \geq 0, \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi & \text{si } a < 0 \text{ y } b < 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } a = 0 \text{ y } b > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } a = 0 \text{ y } b < 0, \\ \text{indefinido} & \text{si } a = 0 \text{ y } b = 0. \end{cases}$$

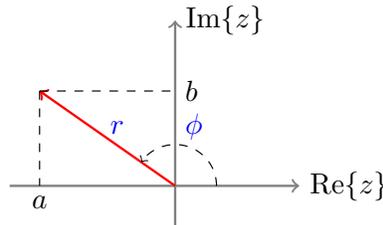


Figura 7.1: Conversión entre coordenadas cartesianas y polares.

En los contenidos relacionados con análisis en el dominio de la frecuencia, usualmente se requiere pasar un número complejo desde coordenadas cartesianas a polares. Veamos un ejemplo de cómo se hace esta operación.

**Ejemplo:** Obtengamos la forma polar de

$$z = \frac{a + bj}{c + dj},$$

donde  $ac + bd > 0$ . Al multiplicar  $z$  por  $(c - dj)/(c - dj)$ , podemos escribir

$$z = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}} \exp[j \arctan2(bc - ad, ac + bd)] = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}} \exp \left[ j \arctan \left( \frac{bc - ad}{ac + bd} \right) \right]. \quad \square$$

Además de dar entregar una descripción clara entre las coordenadas cartesianas y polares, la identidad de Euler es ocupada en este apunte para reescribir las funciones trigonométricas seno y coseno como combinaciones lineales de funciones exponenciales complejas. Para esto,

<sup>1</sup>En vez de memorizar la fórmula, lo más fácil es dibujar el punto  $(a, b)$  en el plano complejo y usar trigonometría para obtener el ángulo entre la recta real positiva y el vector  $(a, b)$ .

simplemente formamos un sistema de ecuaciones con (7.3) y  $e^{-j\phi} = \cos(-\phi) + j \sin(-\phi) = \cos(\phi) - j \sin(\phi)$ , donde las incógnitas son  $\cos(\phi)$  y  $\sin(\phi)$ , obteniéndose

$$\cos(\phi) = \frac{e^{j\phi} + e^{-j\phi}}{2}, \quad \sin(\phi) = \frac{e^{j\phi} - e^{-j\phi}}{2j}.$$

Estas dos formas equivalentes son particularmente útiles en el capítulo 3.

## 7.2. Fracciones parciales

Al expandir en fracciones parciales, se expresa un cociente de polinomios como una suma de cocientes de polinomios de menor orden. Esta técnica es utilizada para determinar transformadas inversa de Fourier, Laplace y Zeta.

En general, deseamos obtener una expansión en fracciones parciales de funciones de la forma

$$F(x) = \frac{B(x)}{A(x)} = \frac{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}{x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0},$$

donde  $m$  es estrictamente menor<sup>2</sup> que  $n$ . El primer paso consiste en factorizar el denominador de  $F(x)$ :

$$F(x) = \frac{B(x)}{(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n)}.$$

A continuación veremos los 2 casos posibles.

### 7.2.1. Denominador con raíces distintas

En caso de que  $A(x)$  tenga raíces todas distintas entre sí, la expansión en fracciones parciales de  $F(x)$  tendrá la forma

$$F(x) = \frac{c_1}{x - x_1} + \frac{c_2}{x - x_2} + \dots + \frac{c_n}{x - x_n}, \quad (7.4)$$

donde  $c_i \in \mathbb{C}$ . Note que los polos  $x_1, \dots, x_n$  pueden ser números complejos.

Sin pérdida de generalidad, veamos cómo obtener el coeficiente  $c_1$ . Multiplicamos por  $(x - x_1)$  en ambos lados de (7.4) para obtener

$$\frac{B(x)}{(x - x_2) \cdots (x - x_n)} = c_1 + \frac{c_2(x - x_1)}{x - x_2} + \dots + \frac{c_n(x - x_1)}{x - x_n}$$

Evaluando en  $x = x_1$ , concluimos que

$$c_1 = \frac{B(x_1)}{(x_1 - x_2) \cdots (x_1 - x_n)}.$$

Los demás coeficientes se calculan de la misma manera.

**Nota:** La expresión (7.4) es una igualdad de polinomios, la cual debe ser satisfecha para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Entonces, otra forma de obtener la expansión en fracciones parciales es simplemente evaluando los polinomios para distintos valores de  $x$ , obteniendo así un sistema de ecuaciones

---

<sup>2</sup>Si la función racional tiene numerador de igual grado que su denominador, se debe separar el término constante  $B(\infty)/A(\infty)$  y expandir en fracciones parciales el resto.

lineales en los coeficientes  $c_i$ . Esta técnica se ocupará luego.

**Ejemplo:** Calculemos la expansión en fracciones parciales de

$$F(x) = \frac{4x + 2}{(x - 1)(x + 1)(x + 3)}.$$

Primero, escribimos

$$F(x) = \frac{c_1}{(x - 1)} + \frac{c_2}{(x + 1)} + \frac{c_3}{(x + 3)}.$$

Los coeficientes  $c_1, c_2, c_3$  están dados por

$$c_1 = \frac{4x + 2}{(x + 1)(x + 3)} \Big|_{x=1} = \frac{3}{4}, \quad c_2 = \frac{4x + 2}{(x - 1)(x + 3)} \Big|_{x=-1} = \frac{1}{2}, \quad c_3 = \frac{4x + 2}{(x + 1)(x - 1)} \Big|_{x=-3} = -\frac{5}{4}.$$

De forma equivalente, podemos encontrar los coeficientes  $c_1, c_2, c_3$  al resolver el siguiente sistema de ecuaciones<sup>3</sup>:

$$\begin{aligned} F(0) &= -c_1 + c_2 + \frac{c_3}{3} \\ F(-2) &= -\frac{c_1}{3} - c_2 + c_3 \\ F(2) &= c_1 + \frac{c_2}{3} + \frac{c_3}{5}, \end{aligned}$$

lo cual conduce a los mismos coeficientes obtenidos anteriormente.  $\square$

### 7.2.2. Denominador con una raíz múltiple

En caso de que  $A(x)$  tenga alguna raíz  $r$  repetida  $n_r$  veces, la expansión en fracciones parciales de  $F(x)$  tendrá la forma

$$F(x) = \frac{c_1}{x - x_1} + \dots + \frac{c_{n-n_r}}{x - x_{n-n_r}} + \frac{d_1}{x - r} + \dots + \frac{d_{n_r}}{(x - r)^{n_r}}, \quad (7.5)$$

donde  $c_i, d_i \in \mathbb{C}$ . Para obtener  $c_1, \dots, c_{n-n_r}$ , se recurre a la misma técnica repasada en la sección anterior para raíces distintas. Esa estrategia también puede usarse para determinar  $d_{n_r}$ , si se multiplica ambos lados de (7.5) por  $(x - r)^{n_r}$  y se evalúa en  $x = r$ . De esta forma se obtiene

$$d_{n_r} = \frac{B(r)}{(r - x_1) \cdots (r - x_{n-n_r})}.$$

Finalmente, para determinar  $d_1, \dots, d_{n_r-1}$ , simplemente se evalúa ambos lados de (7.5) en  $n_r - 1$  puntos distintos (cualquier valor de  $x$  que no sea polo sirve), para obtener un sistema de ecuaciones de  $n_r - 1$  ecuaciones e incógnitas  $d_1, \dots, d_{n_r-1}$ .

**Ejemplo:** Calculemos la expansión en fracciones parciales de

$$F(x) = \frac{3x + 2}{(x - 1)^2(x + 2)(x - 2)}.$$

<sup>3</sup>Los valores de evaluación  $x = 0, 2, -2$  fueron escogidos arbitrariamente. Cualquier valor de  $x \in \mathbb{C}$  que no sea raíz de  $A(x)$  provee una evaluación válida.

Primero, escribimos

$$F(x) = \frac{c_1}{(x+2)} + \frac{c_2}{(x-2)} + \frac{d_1}{(x-1)} + \frac{d_2}{(x-1)^2}. \quad (7.6)$$

Los coeficientes  $c_1, c_2$  y  $d_2$  se calculan mediante

$$c_1 = \frac{3x+1}{(x-1)^2(x-2)} \Big|_{x=-2} = \frac{1}{9}, \quad c_2 = \frac{3x+1}{(x-1)^2(x+2)} \Big|_{x=2} = 2, \quad d_2 = \frac{3x+1}{(x+2)(x-2)} \Big|_{x=1} = -\frac{5}{3}.$$

Finalmente, evaluamos ambos lados de (7.6) en  $x = 0$  para obtener una ecuación que permite determinar  $d_1$ :

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{18} - 1 - d_1 - \frac{5}{3} \iff d_1 = -\frac{19}{9}.$$

**Nota:** En caso de que  $A(x)$  tenga varias raíces repetidas, el procedimiento es similar: primero se encuentran los coeficientes que son posibles de obtener vía el método de raíces distintas estudiadas anteriormente, y luego se evalúa ambos lados de la expansión en distintos puntos, para formar un sistema de ecuaciones consistente y resolver.  $\square$

### 7.3. Álgebra lineal

Álgebra lineal es un contenido base para entender variables de estado. Un muy buen libro para estudiar este tópico es [8].

#### 7.3.1. Conceptos básicos

Un vector  $\mathbf{x}$  en  $\mathbb{R}^n$  es una enetupla

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},$$

donde cada  $x_i \in \mathbb{R}$ . Si  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  es un vector con componentes  $y_i$ , y  $\alpha \in \mathbb{R}$  es un escalar, entonces la suma de vectores y multiplicación por escalar se describe con la identidad

$$\alpha \mathbf{x} + \mathbf{y} = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 + y_1 \\ \alpha x_2 + y_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n + y_n \end{bmatrix}.$$

Dados  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  escalares, un conjunto de vectores  $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m\}$  se dice *linealmente independiente* si la ecuación

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_m \mathbf{x}_m = \mathbf{0}$$

se satisface únicamente cuando  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  son todos cero.

Una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  (es decir, de  $m$  filas y  $n$  columnas), es un arreglo rectangular de la forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

donde  $a_{ij} \in \mathbb{R}$ . Una matriz se dice cuadrada si tiene igual número de filas que columnas. La matriz identidad, denotada como  $\mathbf{I}$ , es una matriz cuadrada cuyos elementos son 1 si forman parte de la diagonal principal (es decir,  $a_{ii} = 1$ ), y 0 en caso contrario.

La multiplicación entre una matriz  $\mathbf{A}$  y un vector  $\mathbf{x}$  se define como

$$\mathbf{Ax} = x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + x_m \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}, \quad (7.7)$$

mientras que la multiplicación entre una matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , que tiene columnas  $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_p \in \mathbb{R}^n$ , se define como

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{Ab}_1 & \mathbf{Ab}_2 & \cdots & \mathbf{Ab}_p \\ | & | & & | \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times p}.$$

### 7.3.2. Determinante

El determinante de una matriz cuadrada es un número que determina múltiples propiedades geométricas y algebraicas de la matriz en cuestión. Es esencial para el cálculo de la inversa de una matriz, como se verá luego.

La fórmula general para calcular determinantes de una matriz cuadrada arbitraria está fuera del alcance de este apéndice. Las fórmulas para matrices de tamaño  $2 \times 2$  y  $3 \times 3$  son las siguientes:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{12} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{33} \\ a_{31} & a_{23} \end{pmatrix} + a_{13} \det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

### 7.3.3. Inversa de una matriz

Una matriz cuadrada  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es *invertible* si existe una matriz  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}.$$

Denotamos  $\mathbf{B}$  como  $\mathbf{A}^{-1}$ , la inversa de la matriz  $\mathbf{A}$ .

Una matriz es invertible si y sólo si  $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ . En caso de existir, se sabe que la inversa de una matriz invertible está dada por

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \text{Adj}(\mathbf{A}),$$

donde  $\text{Adj}(\mathbf{A})$  es la matriz adjunta de  $\mathbf{A}$ , definida como la transpuesta de su matriz de cofactores<sup>4</sup>. A modo de ejemplo,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \left( \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right)} \text{Adj} \left( \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

### 7.3.4. Autovalores y autovectores

Consideremos una matriz cuadrada  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ . Un escalar  $\lambda \in \mathbb{C}$  y un vector no nulo  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^{m \times 1}$  son un *autovalor* de  $\mathbf{A}$  y su *autovector* asociado si

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.$$

Note que la matriz  $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$  no es invertible, pues si lo fuera, se tendría

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{0} \iff \mathbf{x} = \mathbf{0},$$

lo cual contradice que  $\mathbf{x}$  sea no nulo. El razonamiento anterior indica que un autovalor  $\lambda$  es una raíz de la ecuación característica de  $\mathbf{A}$ :

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

Se puede demostrar que el determinante de una matriz es igual al producto de sus autovalores<sup>5</sup>.

Antes de la próxima sección, conviene introducir algunos conceptos de multiplicidad de autovalores. La *multiplicidad algebraica* de un autovalor  $\lambda$  es la cantidad de veces que  $\lambda$  se repite como raíz de la ecuación característica de  $\mathbf{A}$ . Por otra parte, la *multiplicidad geométrica* de un autovalor  $\lambda$  es el número máximo de autovectores linealmente independientes asociados a  $\lambda$ .

### 7.3.5. Diagonalización de una matriz

Una matriz diagonal goza de propiedades útiles para hacer cálculos y análisis, pues es lo más similar a trabajar con escalares. Dados ciertos requerimientos, es posible expresar una matriz  $\mathbf{A}$  como  $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$ , donde  $\mathbf{P}$  es una matriz invertible y  $\mathbf{D}$  es una matriz diagonal. Este procedimiento se denomina *diagonalización de una matriz*, y cuando éste es posible, decimos que la matriz  $\mathbf{A}$  es *diagonalizable*. A final de cuentas, la matriz  $\mathbf{D}$  contiene la información relevante para hacer cálculos con la matriz  $\mathbf{A}$ . Por ejemplo, con la factorización anterior podemos calcular directamente la matriz  $\mathbf{A}^k$ , con  $k \in \mathbb{N}$ , como

$$\mathbf{A}^k = (\mathbf{PDP}^{-1})(\mathbf{PDP}^{-1}) \dots (\mathbf{PDP}^{-1}) = \mathbf{PD}^k\mathbf{P}^{-1}.$$

A modo de ilustración, veamos de dónde surge la factorización  $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$ . Recordemos que cada par autovalor-autovector  $(\lambda_i, \mathbf{x}_i)$  satisface

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_i = \lambda_i\mathbf{x}_i.$$

<sup>4</sup>No se repasa la matriz adjunta en este apéndice, pues no es fundamental para lo que se estudia en el apunte. El lector interesado puede revisar [8] para completar los vacíos.

<sup>5</sup>Para demostrar esta aseveración, basta expandir el polinomio  $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$  y fijar  $\lambda = 0$ .

Podemos formar una matriz con estos vectores columna:

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_m \\ | & | & & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \lambda_1 \mathbf{x}_1 & \lambda_2 \mathbf{x}_2 & \cdots & \lambda_m \mathbf{x}_m \\ | & | & & | \end{bmatrix},$$

lo cual se puede reescribir como

$$\mathbf{A} \underbrace{\begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_m \\ | & | & & | \end{bmatrix}}_{=\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \cdots & \mathbf{x}_m \\ | & | & & | \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{bmatrix}}_{=\mathbf{D}}, \quad (7.8)$$

lo cual nos indica que si la matriz  $\mathbf{P}$  formada por los autovectores es invertible, entonces  $\mathbf{A}$  se puede escribir como  $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$ , donde  $\mathbf{D}$  es una matriz diagonal formada por los autovalores de  $\mathbf{A}$ , y  $\mathbf{P}$  es una matriz compuesta por los autovectores de  $\mathbf{A}$ .

La invertibilidad de la matriz  $\mathbf{P}$  en (7.8) se dará si y sólo si todos sus autovalores tienen la misma multiplicidad algebraica que geométrica. Es decir, una matriz es diagonalizable si y sólo si todos sus autovalores tienen la misma multiplicidad algebraica que geométrica. En particular, si una matriz tiene todos sus autovalores distintos, entonces es diagonalizable.

**Ejemplo:** Diagonalicemos la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Primero, determinamos la ecuación característica

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \iff (-1 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0,$$

la cual conduce a  $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ , y  $\lambda_3 = 2$ . Para el autovalor múltiple en  $-1$ , encontramos los autovectores  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$  al resolver para  $\mathbf{x}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} &\iff \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0} \\ &\iff \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \mathbf{0}. \iff \mathbf{x} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

donde  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ . Es decir, los autovectores son

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Por otra parte, encontramos el autovector asociado con  $\lambda_3$  con el cálculo siguiente:

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{x}_3 = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}_3 = \mathbf{0} \implies \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como los autovectores  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$  y  $\mathbf{x}_3$  son linealmente independientes, la matriz  $\mathbf{A}$  es diagonalizable y tiene factorización dada por

$$\mathbf{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \underbrace{\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}^{-1}}. \quad \square$$

### 7.3.6. Exponencial de una matriz

Para encontrar sistemas equivalentes de tiempo discreto en variables de estado, se requiere calcular  $e^{\mathbf{A}h}$ , donde  $\mathbf{A}$  es una matriz cuadrada. La exponencial de una matriz  $\mathbf{A}$  es una matriz cuadrada definida como

$$e^{\mathbf{A}} \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{A}^k. \quad (7.9)$$

Note que la exponencial de una matriz *no* es la exponencial de sus elementos. Eso si, si  $\mathbf{A}$  es una matriz diagonal, la exponencial de  $\mathbf{A}$  no es más que la matriz diagonal cuyos elementos en la diagonal son las exponenciales de los elementos de la diagonal de  $\mathbf{A}$ .

En este apunte, la forma preferida para calcular la exponencial de una matriz es ocupando directamente la definición (7.9), dado que es la forma que requiere menos conocimientos previos de matemática. Sin embargo, existen muchas formas distintas para obtener la exponencial de una matriz<sup>6</sup>. Aquí daremos otras dos maneras.

**Segundo método:** En caso de que la matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  fuese diagonalizable<sup>7</sup>, escribimos  $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$ , donde  $\mathbf{D}$  es una matriz diagonal con autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ , no necesariamente distintos. Con esta descomposición, vemos que  $\mathbf{A}^2 = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}\mathbf{D}^2\mathbf{P}^{-1}$  y en general,  $\mathbf{A}^k = \mathbf{P}\mathbf{D}^k\mathbf{P}^{-1}$  para  $k \in \mathbb{N}$ . Es decir, podemos calcular  $e^{\mathbf{A}}$  como

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{P} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathbf{D}^k \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P} e^{\mathbf{D}} \mathbf{P}^{-1}.$$

**Tercer método:** Luego de haber estudiado la transformada de Laplace, es posible deducir que<sup>8</sup>

$$\mathcal{L}\{e^{\mathbf{A}t}\} = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}.$$

Entonces, se tiene que

$$e^{\mathbf{A}} = \mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\}|_{t=1},$$

<sup>6</sup>El lector interesado puede consultar la excelente referencia [9]

<sup>7</sup>En caso de que  $\mathbf{A}$  no fuera diagonalizable, el cálculo hecho aún es válido, pero con la *forma de Jordan* de la matriz  $\mathbf{A}$ , en vez de  $\mathbf{D}$ . Esta generalización está afuera del alcance del apunte.

<sup>8</sup>La transformada de Laplace de una matriz es la matriz con componentes dados por la transformada de Laplace de cada elemento.

donde la transformada inversa se calcula elemento a elemento.

**Ejemplo:** Sea

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Determinaremos  $e^{\mathbf{A}}$  de las tres maneras vistas.

1. Primer método: Notemos que

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} -8 & 7 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^4 = \begin{bmatrix} 16 & -15 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Vía inducción, se puede demostrar que, para  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} (-2)^k & (-1)^k - (-2)^k \\ 0 & (-1)^k \end{bmatrix}.$$

Entonces, se tiene

$$e^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k!} & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(-1)^k - (-2)^k]}{k!} \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2} & e^{-1} - e^{-2} \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix}.$$

2. Segundo método: Podemos escribir  $\mathbf{A}$  como

$$\mathbf{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}} \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}^{-1}}.$$

Por ende,

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{P}e^{\mathbf{D}}\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-2} & 0 \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2} & e^{-1} - e^{-2} \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix}.$$

3. Tercer método: Primero calculamos

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+2)(s+1)} \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$\mathcal{L}^{-1}\{(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{s+2} & \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \mu(t).$$

y por ende

$$e^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^{-2} & e^{-1} - e^{-2} \\ 0 & e^{-1} \end{bmatrix},$$

tal como se esperaba.  $\square$

## 7.4. Ecuaciones diferenciales ordinarias

En esta sección repasaremos cómo resolver ecuaciones diferenciales ordinarias lineales.

### 7.4.1. Ecuaciones diferenciales de primer orden

En general, se busca resolver una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dx(t)}{dt} + p(t)x(t) = q(t)u(t), \quad (7.10)$$

con condición inicial  $x(0) = x_0$ . En este apunte,  $u(t)$  es la entrada a algún sistema, mientras que  $x(t)$  es la respuesta que se quiere determinar. Para encontrar  $x(t)$ , multiplicamos por  $\exp\{\int_0^t p(s)ds\}$  a ambos lados de (7.10) para obtener

$$\frac{d[x(t) \exp\{\int_0^t p(s)ds\}]}{dt} = q(t)u(t)e^{\int_0^t p(s)ds}.$$

Esto conduce a

$$x(t) = x_0 e^{-\int_0^t p(s)ds} + e^{-\int_0^t p(s)ds} \int_0^t q(\tau)u(\tau)e^{\int_0^\tau p(s)ds} d\tau.$$

Para el caso común donde  $p(t) = -a$  y  $q(t) = b$  constantes, se tiene

$$x(t) = x_0 e^{at} + b \int_0^t u(\tau)e^{a(t-\tau)} d\tau. \quad (7.11)$$

### 7.4.2. Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

En general, resolver un sistema de ecuaciones diferenciales no es una tarea fácil. Sin embargo, para el caso de primer orden con coeficientes constantes, la solución es bastante simple. Las ideas vistas acá tienen aplicación directa en la sección de variables de estado.

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1(t)}{dt} &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \cdots + a_{1n}x_n(t) + b_1u(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \cdots + a_{2n}x_n(t) + b_2u(t) \\ &\vdots = \quad \vdots \quad + \quad \vdots \quad + \cdots + \quad \vdots \quad + \quad \vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \cdots + a_{nn}x_n(t) + b_nu(t), \end{aligned}$$

sujeto a  $x_1(0) = x_{10}$ ,  $x_2(0) = x_{20}$ , ...,  $x_n(0) = x_{n0}$ . Este sistema se puede reescribir como

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)$$

sujeto a  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ , donde

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{bmatrix}.$$

Para simplificar los cálculos, supongamos que  $\mathbf{A}$  es diagonalizable. Es decir, podemos escribir  $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{D}\mathbf{P}^{-1}$ , donde  $\mathbf{D}$  es una matriz diagonal compuesta por los autovalores de  $\mathbf{A}$ , los cuales llamaremos  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ .

Gracias a esta descomposición, proponemos el cambio de variable  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(t)$ , con  $\mathbf{z}(0) := \mathbf{z}_0 = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_0$ . Con esta sustitución, nos queda

$$\frac{d\mathbf{z}(t)}{dt} = \mathbf{D}\mathbf{z}(t) + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}u(t),$$

lo cual no es más que  $n$  ecuaciones diferenciales ordinarias desacopladas de la forma

$$\frac{dz_i(t)}{dt} = \lambda_i z_i(t) + \tilde{b}_i u(t),$$

donde  $\tilde{b}_i$  es el  $i$ -ésimo elemento del vector  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}$ . Acudiendo a lo obtenido en la sección 7.4.1, obtenemos

$$z_i(t) = z_{0i}e^{\lambda_i t} + \tilde{b}_i \int_0^t u(\tau)e^{\lambda_i(t-\tau)} d\tau.$$

Sabiendo que la matriz diagonal formada por  $e^{\lambda_i t}$ ,  $i = 1, \dots, n$  es equivalente a la matriz  $e^{\mathbf{D}t}$ , podemos escribir

$$\mathbf{z}(t) = e^{\mathbf{D}t}\mathbf{z}_0 + \int_0^t u(\tau)e^{\mathbf{D}(t-\tau)} d\tau \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}.$$

Finalmente, volvemos a  $\mathbf{x}(t)$  gracias a  $\mathbf{z}(t) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}(t)$ , quedando

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{P}e^{\mathbf{D}t}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}_0 + \int_0^t u(\tau)\mathbf{P}e^{\mathbf{D}(t-\tau)}\mathbf{P}^{-1}d\tau\mathbf{B} \\ &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t u(\tau)e^{\mathbf{A}(t-\tau)}d\tau\mathbf{B}, \end{aligned} \quad (7.12)$$

lo cual es una generalización de lo obtenido en (7.11). El resultado (7.12) corresponde a la solución explícita de la ecuación de estado en la representación de variables de estado de un sistema lineal e invariante en el tiempo. Si bien el desarrollo fue hecho asumiendo que  $\mathbf{A}$  es diagonalizable, puede demostrarse que (7.12) es válida para cualquier matriz  $\mathbf{A}$ .

### 7.4.3. Ecuaciones diferenciales de segundo orden

En este apunte, sólo se cubren ecuaciones diferenciales de segundo grado lineales con coeficientes constantes. Aquí, interesa resolver la ecuación

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + a\frac{dx(t)}{dt} + bx(t) = u(t), \quad (7.13)$$

sujeto a  $x(0) = x_0$  y  $dx(0)/dt = x'_0$ . Al hacer  $x_1(t) = x(t)$  y  $x_2(t) = dx(t)/dt$ , podemos escribir la ecuación diferencial (7.13) como

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1(t)}{dt} \\ \frac{dx_2(t)}{dt} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} u(t).$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales tiene solución dada por (7.12). Así, si  $\mathbf{x}(t)$  es la solución de (7.12) para este caso, la solución de (7.13) está dada por  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$ , es decir, es la primera componente del vector  $\mathbf{x}(t)$ . Para ilustrar este resultado, obtengamos la solución explícita en caso de que  $a^2 - 4b \neq 0$ . En este caso, podemos diagonalizar  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix},$$

donde los autovalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  están dados por

$$\lambda_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Note además que  $\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{a^2 - 4b} \neq 0$ . Entonces, podemos escribir la respuesta frente a las condiciones iniciales como

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x'_0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{(\lambda_2 x_0 - x'_0) e^{\lambda_1 t} - (\lambda_1 x_0 - x'_0) e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1}. \end{aligned}$$

Por otra parte, la componente asociada al estímulo  $u(t)$  está dada por

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \int_0^t u(\tau) e^{\mathbf{A}(t-\tau)} d\tau \mathbf{B} &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_0^t u(\tau) \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau \\ &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_0^t u(\tau) [e^{\lambda_1(t-\tau)} - e^{\lambda_2(t-\tau)}] d\tau. \end{aligned}$$

Entonces, la respuesta total es

$$x(t) = \frac{(\lambda_2 x_0 - x'_0) e^{\lambda_1 t} - (\lambda_1 x_0 - x'_0) e^{\lambda_2 t}}{\lambda_2 - \lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \int_0^t u(\tau) [e^{\lambda_1(t-\tau)} - e^{\lambda_2(t-\tau)}] d\tau.$$

De esta solución vemos cómo las condiciones iniciales influyen linealmente en la respuesta total. Esta parte de la respuesta decae (o crece) exponencialmente según los autovalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$ . Además, la señal  $u(t)$  es integrada con una función peso también exponencial, dependiente de los autovalores ya calculados. En el capítulo 2, se ve que esta operación es la *convolución* entre la función  $u(t)$  y los *modos naturales* del sistema,  $e^{\lambda_1 t}$  y  $e^{\lambda_2 t}$ .

# Bibliografía

- [1] M. E. Salgado, J. I. Yuz, and R. A. Rojas, *Análisis de Sistemas Lineales*. 2nd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2014.
- [2] K. H. Lundberg, H. R. Miller, and D. L. Trumper, “Initial conditions, generalized functions, and the Laplace transform troubles at the origin,” *IEEE Control Systems Magazine*, vol. 27, no. 1, pp. 22–35, 2007.
- [3] T. Söderström and P. Stoica, *System Identification*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1989.
- [4] A. V. Oppenheim, R. W. Schaffer, and J. R. Buck, *Discrete-time Signal Processing*. 2nd ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1999.
- [5] E. O. Brigham, *The fast Fourier transform and its applications*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1988.
- [6] G. C. Goodwin, S. F. Graebe, and M. E. Salgado, *Control System Design*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2001.
- [7] K. J. Åström and B. Wittenmark, “Computer Controlled Systems: Theory and Design,” *Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ*, 1984.
- [8] G. Strang, *Linear Algebra and its Applications*. 4th ed., Thomson Learning, 2006.
- [9] C. Moler and C. Van Loan, “Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later,” *SIAM review*, vol. 45, no. 1, pp. 3–49, 2003.